MINISTERIO
DE ECONOMÍA, COMERCIO
Y EMPRESA

INE
Instituto Nacional de Estadística

Oposición al Cuerpo Superior de Estadísticos de Estado

Segundo Ejercicio

Convocatoria de la oferta pública de empleo de 2023

Resolución de 14 de diciembre de 2023, de la Subsecretaría, por la que se convocan procesos selectivos para ingreso, por el sistema de acceso libre y promoción interna, en el Cuerpo Superior de Estadísticos del Estado. (BOE 27 de Diciembre de 2023)

Acceso Promoción Interna, CDEE

Cuestión 1. En una población formada por $N = 8$ unidades $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$, se considera un diseño muestral que genera las siguientes muestras posibles:

$$p(\{1,3,5,6\}) = \frac{1}{8}; \quad p(\{1,4,6,8\}) = \frac{1}{8}; \quad p(\{4,5,7,8\}) = \frac{1}{8}$$
$$p(\{2,3,7,8\}) = \frac{1}{4}; \quad p(\{2,4,6,8\}) = \frac{3}{8}$$

Se pide:

a) Calcular las probabilidades de inclusión de primer orden, π_i, de todos los elementos de la población.

b) El diseño de la muestra, ¿es aleatorio simple sin reemplazamiento, aleatorio simple estratificado o ninguno de ellos? Razonar la respuesta.

c) Si los tamaños de estas 8 unidades son $\{100, 40, 40, 20, 20, 10, 5, 5\}$ respectivamente, ¿podría aplicarse un diseño muestral sin reposición, con tamaño $n = 4$, de manera que las π_i sean proporcionales a sus tamaños? Justifique su respuesta.

Cuestión 2. La función de densidad conjunta de las variables (X, Y) es la siguiente:

$$f_a(x, y) = a^2 e^{a(x+y)}, x \geq 0, y \geq 0.$$

Se toma una muestra aleatoria simple de tamaño n.

a) Calcule el estimador máximo verosímil del parámetro a.

b) Utilice dicho estimador para obtener $\hat{a}$ a partir de la información muestral recogida en la siguiente tabla:

x	1	2	3	4	5
y	2	0	1	0	1

Cuestión 3. .

a) Sea un sistema de representación numérica de enteros con 8 bits.

- Expresar el número decimal -39, en representación binaria utilizando formatos signo-magnitud (con primer dígito para signo), complemento a 1 y complemento a 2. El dígito de signo se representa como 1 negativo y 0 positivo.

- Si un número binario en complemento a 2 se representa como 10101010, ¿cuál es su valor decimal?.

- ¿Cuál es el entero mínimo y máximo representables en complemento a 2 en este sistema (que incluye bit de signo)?.

b) En un sistema binario (sin bit para signo), ¿a qué valor decimal exacto equivale el número 110101,111?

c) ¿Cuál es el valor decimal exacto del número binario $0,10101101101\ldots = 0,10\widehat{101}$?

Cuestión 4. Una empresa especializada en servicios de seguridad busca estimar el total de viviendas equipadas con sistemas de seguridad en una determinada área urbana, con el propósito de desarrollar estrategias de marketing dirigidas a promover sus servicios. Para lo cual se seleccionan 80 conglomerados utilizando muestreo aleatorio simple sin reposición y probabilidades iguales con una fracción de muestreo de $\frac{1}{50}$. El tamaño de cada conglomerado es de 10 viviendas. Asimismo, para cada conglomerado i seleccionado en la muestra, se denota por A_i al número total de viviendas que tienen contratadas servicios de seguridad. Los resultados de la investigación son los siguientes:

$$\sum_{i=1}^{80} A_i = 370 \quad \sum_{i=1}^{80} A_i^2 = 2536$$

Se pide:

a) Una estimación insesgada del total de viviendas con servicios de seguridad contratados en el área urbana y su error de muestreo relativo o coeficiente de variación.

b) Una estimación del efecto de diseño del muestreo descrito comparado con el muestreo aleatorio simple sin reposición.

c) Estimar el coeficiente de correlación intraconglomerados o coeficiente de homogeneidad de los conglomerados.

Cuestión 5. Considere que la esperanza condicional de una variable dependiente y es la siguiente

$$E(y|x_1, x_2) = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \beta_3 x_1 x_2,$$

donde las variables son continuas.

a) Calcule qué efecto esperado (efecto parcial) sobre y tiene un cambio de una unidad en la variable x_1, considerando que x_2 permanece constante.

b) Si dispusiera de una muestra de tamaño n, y quisiera estimar el siguiente modelo

$$y_i = \beta_0 + \beta_1 x_{1i} + \beta_2 x_{2i} + \beta_3 x_{1i} x_{2i} + u_i, i = 1, ..., n,$$

donde los errores u_i no son observables, ¿cómo se deduciría y cuál sería la expresión del estimador de mínimos cuadrados ordinarios de $\boldsymbol{\beta} = (\beta_0, \beta_1, \beta_2, \beta_3)^T$?

Cuestión 6. Para el estudio del comportamiento medio de una determinada caracterísica cuantitativa Y en una población, se propone aplicar un muestreo aleatorio estratificado.

La población ha sido agrupada en tres estratos de acuerdo a su edad: menos de 20 años, de 20 a 49 años y de 50 o más años. La información de la que se dispone de los estratos es la siguiente:

Estrato	Tramos edad	N_h	$\bar{Y}_h$	S_h^2
1	De 0 a 20 años	150	20	36
2	De 20 a 49 años	250	35	144
3	De 50 o más años	200	60	256

Donde :

- N_h= Número de personas en el estrato h.
- $\bar{Y}_h$= Valor medio de la característica en el estrato h.
- S_h^2= Cuasivarianza poblacional de Y en el estrato h.

Se realiza un muestreo sin reemplazamiento y con probabilidades iguales en cada estrato. Se pide:

a) Obtener la cuasivarianza poblacional de Y. ¿Que proporción supone la variación interestrato de la variación total?

b) Comentar a la vista de los resultados obtenidos en el apartado anterior, si la variable de estratificación es apropiada en términos de ganancia en precisión.

c) Calcular el tamaño muestral necesario, para que siendo una muestra autoponderada, se obtenga una varianza para el estimador de la media de 1,45. Asimismo, calcular los tamaños muestrales en los estratos.