ESTADÍSTICA ESPAÑOLA
núm. 108, 1985, págs. 107 a 116

Caracterización axiomática de la Energía Informacional útil

por JULIO ANGEL PARDO LLORENTE
Escuela Universitaria de Estadística
Universidad Complutense de Madrid

RESUMEN

En este trabajo, establecemos un teorema de unicidad para la energía Informacional útil. Este concepto, introducido por Pardo (1977), evalua la cantidad de información asociada a un experimento aleatorio en el que los resultados elementales vienen caracterizados tanto por sus probabilidades de ocurrencia como por sus utilidades.

Palabras clave: Campo de probabilidad y utilidad, Energía Informacional Util.

1. CARACTERIZACION DE LA ENERGIA INFORMACIONAL UTIL

Sea A un campo de resultados $A_1,...,A_n$ con probabilidades $p_1,...,p_n$ con $p_i > 0$, $i=1,...,n$, $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$ y utilidades $u_1,...,u_n$ con $u_i > 0$, $i=1,...,n$, respectivamente. Se denomina energía informacional útil del campo A, Pardo (1977), a la expresión

$$eU(p_1,...,p_n; u_1,...,u_n) = \sum_{i=1}^{n} \frac{u_i}{E[U]} p_i^2$$

donde $E[U] = \sum_{i=1}^{n} p_i u_i$

A continuación vamos a probar un teorema que permite caracterizar la energía informacional útil.

Teorema I

Sean $eU(1;u)$, $eU(p_1, p_2; u_1, u_2)$, ..., $eU(p_1,..., p_n ; u_1,..., u_n)$,...
una sucesión de funciones asignadas a campos de probabilidad y utilidad finitos, formados respectivamente por 1, 2,..., n,.. sucesos elementales. Supongamos que se verifican los siguientes axiomas:

(I)

$$eU(p_1,..., p_{i-1}, p', p'', p_{i+1},..., p_n; u_1,..., u_{i-1}, u', u'', u_{i+1},..., u_n) =$$

$$= eU\left(p_1,..., p_{i-1}, p', p'', p_{i+1},..., p_n; u_1,..., u_{i-1}, \frac{u'p' + u''p''}{p' + p''}, u_{i+1},..., u_n\right) -$$

$$- \frac{[p' + p''][p'u' + p''u'']}{[p_1u_1 +..+ p'u' + p''u'' +..+ p_nu_n]} \left[1 - eU\left[\frac{p'}{p' + p''}, \frac{p''}{p' + p''}; u', u''\right]\right]$$

(II) $eU\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}; u_1,..., u_n\right) = g(n)$

(III) $eU(p_1,..., p_n; u_1,..., u_n)$ sea una función simétrica respecto de los pares (p_i, u_i) para $i=1, 2,..., n$

(IV) $eU\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}; u, u\right) = \frac{1}{2}$

(V) $eU(p, 1-p; u_1, u_2)$ es una función continua con respecto a "p" en el intervalo $[0,1]$, cualesquiera que sean u_1 y u_2 no negativas.

Entonces la única función verificando las propiedades anteriores viene dada por

$$eU(p_1,..., p_n; u_1,..., u_n) = \frac{1}{E[U]} \sum_{i=1}^{n} p_i^2 u_i \qquad (1)$$

siendo $E[U] = \sum_{i=1}^{n} p_i u_i$

Demostración

Antes de comenzar a probar el teorema observemos que los axiomas III y V parecen naturales, el IV es un axioma de normalización mientras que el II establece que en caso de que todas las probabilidades sean iguales la energía informacional útil es únicamente función del número de ellas.

Comenzaremos estableciendo cuatro lemas que serán necesarios en la demostración del teorema enunciado.

Lema 1

$$eU\,(p_1,\dots, p_n, 0\,;\, u_1,\dots, u_n, u_{n+1}) = eU\,(p_1,\dots, p_n;\, u_1,\dots, u_n)$$

Demostración

Comenzaremos probando que $eU\,(1, 0;\, u_1, u_2) = 1$. A partir del axioma (I) se sigue que

$$eU\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0;\, u_1, u_2, u_3\right) = eU\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2};\, u_1, \frac{\frac{1}{2}u_1 + 0\,u_3}{\frac{1}{2}}\right) -$$

$$- \frac{(1/2)\,(u_2/2)}{1/2\,(u_1 + u_2)}\,[\,1 - eU\,(1,0\,;\, u_2, u_3)\,]$$

Además aplicando el axioma (III) $eU\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0;\, u_1, u_2, u_3\right) = eU\left(0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2};\, u_3, u_2, u_1\right)$ y nuevamente el axioma (I), se sigue

(3)
$$eU\left(0,\frac{1}{2}, \frac{1}{2};\, u_3, u_2, u_1\right) = eU\left(0,1;\, u_3, \frac{1}{2}(u_1+u_2)\right) - \left(1 - eU\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2};\, u_2, u_1\right)\right)$$

y de (2) y (3) se sigue que

$$- \frac{\frac{1}{2}\,\frac{u_2}{2}}{\frac{1}{2}\,[u_1 + u_2]}\,[\,1 - eU\,(1,0\,;\, u_2, u_3)\,] = e\,U\left(0,1\,;\, u_3, \frac{1}{2}(u_1 + u_2)\right) - 1$$

haciendo $u_2 = u_1$, se tiene

$$-\frac{1}{4}[\,1 - eU\,(1,0;\, u_1, u_3)\,] = eU\,(0,1;\, u_3, u_1) - 1$$

$$eU\,(1,0;\, u_1, u_3) = 1 \qquad \forall\; u_1, u_3$$

Es decir ante un resultado seguro la energía informacional útil es máxima. A partir del axioma (I) y de (4), se tiene

$$eU\,(p_1, p_2,\ldots, p_n, 0; u_1, u_2,\ldots, u_{n-1}, u_n, u_{n+1}) = eU\,(p_1,\ldots, p_n, u_1,\ldots, u_n) -$$

$$- \frac{p_n\,(p_n\,u_n + 0\,u_{n+1})}{[p_1\,u_1 + \ldots + p_{n-1}\,u_{n-1}]}\;[\,1 - eU\,(\frac{p_n}{p_n + 0}\,,\,\frac{0}{p_n + 0}\,;\,u_n, u_{n+1})\,] =$$
$$= eU\,(p_1,\ldots, p_n\,;\,u_1,\ldots, u_n)$$

Lema 2

Sean $q_1,\ldots, q_m$ tales que $\sum_{k=1}^{m} q_i = p_i$, $q_i \geq 0$ y $p_i > 0$. Designemos por

$$v_i = \frac{q_1\,v_1 + \ldots + q_m\,v_m}{q_1 + \ldots + q_m} \quad \text{y} \quad E\,[U] = p_1\,u_1 + \ldots + p_{i-1}\,u_{i-1} + \sum_{k=1}^{i} q_k\,v_k +$$
$$+ \sum_{k=i+1}^{n} p_k\,u_k$$

Entonces

$$eU\,(p_1,\ldots, p_{i-1}, q_1,\ldots, q_m, p_{i+1},\ldots, p_n\,; u_1,\ldots, u_{i-1}, v_1,\ldots, v_m, u_{i+1},\ldots, u_n) =$$
$$= eU\,(p_1,\ldots, p_{i-1}, p_i, p_{i+1},\ldots, p_n\,;\,u_1,\ldots, u_{i-1}, v_i, u_{i+1},\ldots, u_n) -$$
$$- \frac{p_i\,[q_1\,v_1 + \ldots + q_m\,v_m]}{E\,[U]}\;[1 - eU\,(\frac{q_1}{p_i},\ldots,\frac{q_1}{p_i}\,;\,v_1,\ldots,v_m)\,]$$

Demostración

Vamos a probarlo por inducción a "m". Para m=2 trivialmente se verifica por quedar la expresión del axioma (I). Supongamos que es cierto para m y vamos a probarlo para m+1. En virtud del lema 1, podemos suponer sin perdida de generalidad que $q_1, q_2,\ldots, q_{m+1}$ son positivas.

Llamando $t=q_2 + \ldots + q_{m+1}$, $v_t=(q_2\,v_2 + \ldots + q_{m+1}\,v_{m+1}) / (q_2 + \ldots + q_{m+1})$
y $s= (q_1\,v_1 + \ldots + q_{m+1}\,v_{m+1}) / (q_1 + \ldots + q_{m+1})$, se tiene

$$eU\,(p_1,\ldots, p_{i-1}, q_1,\ldots, q_m, p_{i+1},\ldots, p_n\,; u_1,\ldots, u_{i-1}, v_1,\ldots, v_m, u_{i+1},\ldots, u_n) =$$

$$= eU\,(p_1,\dots, p_{i-1}, q_1, t, p_{i+1},\dots, p_n\ ;\ u_1,\dots, u_{i-1}, v_1, v_t, u_{i+1},\dots, u_n) -$$

$$- \frac{t\,[q_2 v_2 +\dots+ q_{m+1} v_{m+1}]}{E\,[U]}\ \left[1 - eU\,\left(\frac{q_2}{t},\dots,\frac{q_{m+1}}{t}\ ;\ v_2,\dots,v_{m+1}\right)\right] =$$

$$= eU\,(p_1,\dots, p_{i-1}, p_i, p_{i+1},\dots, p_n\ ;\ u_1,\dots, u_{i-1}, s, u_{i+1},\dots, u_n) -$$

$$- \frac{p_i\ [q_1 v_1 +\dots+ q_{m+1} v_{m+1}]}{E\,[U]}\ \left[1 - eU\,\left(\frac{q_1}{p_i}, \frac{t}{p_i}\ ;\ v_1,\dots,v_t\right)\right] -$$

$$- \frac{t\,[q_2 v_2 +\dots+ q_{m+1} v_{m+1}]}{E\,[U]}\ \left[1 - eU\,\left(\frac{q_2}{t},\dots,\frac{q_{m+1}}{t}\ ;\ v_2,\dots,v_{m+1}\right)\right]$$

Por otra parte

$$- t\,[q_2 v_2 +\dots+ q_{m+1} v_{m+1}]\ \left[1 - eU\,\left(\frac{q_2}{t},\dots,\frac{q_{m+1}}{t}\ ;\ v_2,\dots v_{m+1}\right)\right] =$$

$$= -\,(q_1 v_1 +\dots+ q_{m+1} v_{m+1})\ p_i\left[\,eU\,\left(\frac{q_1}{p_i}, \frac{t}{p_i}\ ;\ v_1, u_t\right) - eU\,\left(\frac{q_1}{p_i},\dots,\frac{q_{m+1}}{p_i}\ ;\ v_1,\dots,v_{m+1}\right)\right] -$$

Volviendo a (5), se tiene

$$eU\,(p_1,\dots, p_{i-1}, q_1,\dots, q_{m+1}, p_{i+1},\dots, p_n\ ;\ u_1,\dots, u_{i-1}, v_1,\dots, v_m, u_{i+1},\dots, u_n) =$$

$$= eU\,(p_1,\dots, p_{i-1}, p_i, p_{i+1},\dots, p_n\ ;\ u_1,\dots, u_{i-1}, v, u_{i+1},\dots, u_n) -$$

$$- \frac{p_i\ [q_1 v_1 +\dots+ q_{m+1} v_{m+1}]}{E\,[U]}\ \left[1 - eU\,\left(\frac{q_1}{p_i}, \frac{t}{p_i}\ ;\ v_1, u_t\right)\right] -$$

$$\frac{-\ [q_1 v_1 +\dots+ q_{m+1} v_{m+1}]}{E\,[U]}\ p_i\, eU\,\left(\frac{q_1}{p_i}, \frac{t}{p_i}\ ;\ v_1, u_t\right) +$$

$$\frac{p_i\ [q_1 v_1 +\dots+ q_{m+1} v_{m+1}]}{E\,[U]}\ p_i\, eU\,\left(\frac{q_1}{p_i},\dots,\frac{q_{m+1}}{p_i}\ ,\ v_1, v_{m+1}\right) =$$

$$= eU\,(p_1,\ldots, p_{i-1}, p_i, p_{i+1},\ldots, p_n \,;\, u_1,\ldots, u_{i-1}, s, u_{i+1},\ldots, u_n) -$$

$$- \frac{p_i\,[q_1\, v_1 + \ldots + q_{m+1}\, v_{m+1}]}{E\,[U]} \qquad [1 - eU\,(\frac{q_1}{p_i}, \frac{q_{m+1}}{p_i}\,;\, v_1,\ldots,v_{m+1})\,]$$

Lema 3

Sean $q_{ij} > 0$, $j=1,\ldots, m$, $\sum_{j=1}^{m_i} q_{ij} = p_i > 0$, $i=1, 2,\ldots, n$ y $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$. Designemos por

$$v_i = \frac{q_{i1}\, u_{i1} + \ldots + q_{imi}\, u_{imi}}{q_{i1} + \ldots + q_{imi}} \qquad E\,[U] = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m_i} u_{ij}\, q_{ij}$$

$$eU\,(q_{11},\ldots, q_{1m1},\ldots, q_{n1},\ldots, q_{nmn}\,;\, u_{11},\ldots, u_{1m1},\ldots, u_{n1},\ldots, u_{nmn}) =$$

$$= eU\,(p_1,\ldots, p_n;\, v_1,\ldots, v_n) - \sum_{i=1}^{n} \left[\frac{p_i\,[\,q_{i1}\, u_{i1} + \ldots + q_{imi}\, u_{imi}\,]}{E\,[U]}\right.$$

$$\left.[1 - eU\,[\frac{q_{i1}}{p_i},\ldots, \frac{q_{imi}}{p_i}, u_{i1},\ldots, u_{imi}]\right]$$

Demostración

Se obtiene sin mas que aplicar sucesivamente el lema 2.

Lema 4

$$eU\,(\frac{1}{n},\ldots \frac{1}{n}\,;\, u_1,\ldots, u_n) = \frac{1}{n} \qquad \forall\; u_1,\ldots, u_n$$

Demostración

Si en el lema 3, hacemos $m_i = m$, $q_{ij} = \dfrac{1}{m\; n}$, $i=1,\ldots, n$, $j=1,\ldots, m$ se tiene

$$eU\left(\frac{1}{m\,n},\overset{(mn}{\ldots},\frac{1}{m\,n};\ u_{11},\ldots,u_{1m},\ldots,u_{n1},\ldots,u_{nm}\right)=$$

$$=eU\left(\frac{1}{n},\ldots,\frac{1}{n};\ \frac{1}{m}(u_{11}+\ldots+u_{1m}),\ldots,\frac{1}{m}(u_{n1}+\ldots+u_{nm})\right)-$$

$$\sum_{i=1}^{n}\left[\frac{\frac{1}{n}\left(u_{i1}\frac{1}{m\,n}+\ldots+u_{im}\frac{1}{m\,n}\right)}{\frac{1}{m\,n}(u_{11}+\ldots+u_{im}+\ldots+u_{n1}+\ldots+u_{nm})}\right]\left[1-eU\left(\frac{1/nm}{1/n},\ldots,\frac{1/nm}{1/n};\ u_{i1},\ldots,u_{im}\right)\right]$$

y aplicando el axioma (II) se sigue que

$$g(nm)=g(n)-\frac{1}{n}(1-g(m))$$

Analogamente

$$g(nm)=g(m)-\frac{1}{m}(1-g(n))$$

Por tanto

$$g(nm)=g(n)-\frac{1}{n}(1-g(m))=g(m)-\frac{1}{m}(1-g(n)) \qquad (5')$$

Tomando m=2 en (5'), se tiene

$$g(2n)=g(n)-\frac{1}{n}(1-g(2))=g(2)-\frac{1}{2}(1-g(n))$$

Por tanto

$$g(n)\left[1-\frac{1}{2}\right]=g(2)\left(-\frac{1}{n}+1\right)-\frac{1}{2}+\frac{1}{n}$$

de donde

$$g(n)=2\,g(2)\left(1-\frac{1}{n}\right)-1+\frac{2}{n}$$

y aplicando el axioma (IV), se tiene que $g(n)=\frac{1}{n}$

Una vez vistos estos cuatro lemas, pasemos a probar el Teorema. Tomando en el lema 3 n=2, m_1=r, m_2=$s-r$ y $q_{ij}=\frac{1}{s}$, obtenemos

$$p_1 = q_{11} + \ldots + q_{1r} = \frac{r}{s}, \; p_2 = q_{21} + \ldots + q_{2\,s-r} = \frac{s-r}{2}$$

$$v_1 = \frac{1}{r} \sum_{i=1}^{r} u_{1i} = u_1 \quad , \quad v_2 = \frac{1}{s-r} \sum_{j=1}^{s-r} u_{2j} = u_2$$

$$\mathrm{E}\,[\mathrm{U}] = \frac{r}{s} u_1 + \frac{s-r}{s} u_2$$

Por tanto

$$e\mathrm{U}\,(\frac{1}{s},\ldots,\frac{1}{s};\ \overbrace{u_1,\ldots,u_1}^{r},\ \overbrace{u_2,\ldots,u_2}^{s-r}) =$$

$$= e\mathrm{U}\,(\frac{r}{s}, \frac{s-r}{s}; u_1, u_2) - \frac{\frac{r}{s}\, r\, u_1}{\mathrm{E}\,[\mathrm{U}]\, s} \; (1 - e\mathrm{U}\,(\frac{1}{r},\ldots,\frac{1}{r};\ u_1,\ldots,u_1)] -$$

$$- \frac{\frac{s-r}{s}}{\mathrm{E}\,[\mathrm{U}]} \frac{(s-r)}{s} u_2\, (1 - e\mathrm{U}\,(\frac{1}{s-r},\ldots,\frac{1}{s-r};\ u_2,\ldots,u_2)\,) =$$

$$= e\mathrm{U}\,(\frac{r}{s}, \frac{s-r}{s}; u_1, u_2) - \frac{r^2 \quad u_1}{\mathrm{E}[\,\mathrm{U}\,]\, s^2}(1 - \frac{1}{r}) - \frac{(s-r)^2}{\mathrm{E}\,[\mathrm{U}]\, s^2} u_2\, (1 - \frac{1}{s-r})$$

es decir

$$\frac{1}{s} = e\mathrm{U}\,(\frac{r}{s}, \frac{s-r}{s}; u_1, u_2) - \frac{r^2}{s^2} \frac{u_1}{\mathrm{E}[\,\mathrm{U}\,]} + \frac{r u_1}{s^2\, \mathrm{E}[\,\mathrm{U}\,]} - \frac{(s-r)^2\, u_{2l}}{s^2 \quad \mathrm{E}[\,\mathrm{U}\,]} + \frac{(s-r)}{s^2} \frac{u_2}{\mathrm{E}[\,\mathrm{U}\,]}$$

y

$$e\mathrm{U}\,(\frac{r}{s}, \frac{s-r}{s}; u_1, u_2) = \frac{1}{\mathrm{E}\,[\,\mathrm{U}]} \frac{r^2}{s^2} u_1 + \frac{1}{\mathrm{E}\,[\,\mathrm{U}]} \frac{(s-r)^2}{s^2} u_2 + \frac{1}{s} - \frac{r u_l + (\;1 - r\,)\, u_2}{s^2 \quad \mathrm{E}\,[\,\mathrm{U}]} =$$

$$= \frac{1}{\mathrm{E}\,[\,\mathrm{U}]} \frac{r^2}{s^2} u_1 + \frac{1}{\mathrm{E}\,[\,\mathrm{U}]} \frac{(s-r)^2}{s^2} u_2$$

Aplicando el axioma (V), es inmediato que

$$e\mathrm{U}\,(p_1, p_2\,; u_1, u_2) = \frac{1}{(u_1\, p_1 + u_2\, p_2)} \quad \sum_{i=1}^{2} u_i\, p_i^2$$

Finalmente vamos a probar (1) por inducción. Para n=2, tenemos (6). Supongamos que (1) se verifique para n=m y vamos a ver que se verifica para n=m+1.

Aplicando el axioma (I), se tiene

$$eU(p_1,\dots,p_m,p_{m+1};u_1,\dots,u_{m+1})=$$

$$= eU\left(p_1,\dots,p_{m-1},p_m+p_{m+1};u_1,\dots,u_{m-1},\frac{p_m u_m+p_{m+1}u_{m+1}}{p_m+p_{m+1}}\right)-$$

$$-\frac{[p_m+p_{m+1}]\,[p_m u_m+p_{m+1}u_{m+1}]}{[p_1u_1+\dots+p_{m+1}u_{m+1}]}\left[1-eU\left(\frac{p_m}{p_m+p_{m+1}},\frac{p_{m+1}}{p_m+p_{m+1}};u_m,\right.\right.$$

$$\left.\left.u_{m+1}\right)\right]=\frac{1}{[p_1u_1+\dots+p_{m+1}u_{m+1}]}\left[p_1^2u_1+\dots+p_{m-1}^2u_{m-1}+\right.$$

$$\left.+(p_m+p_{m+1})^2\frac{p_m u_m+p_{m+1}u_{m+1}]}{[p_m+p_{m+1}]}\right]-$$

$$-\frac{[p_m+p_{m+1}]\,[p_m u_m+p_{m+1}u_{m+1}]}{[p_1u_1+\dots+p_m u_m+p_{m+1}u_{m+1}]}+\frac{[p_m+p_{m+1}]\,[p_m u_m+p_{m+1}u_{m+1}]}{[p_1u_1+\dots+p_{m+1}u_{m+1}]\,[p_m u_m+p_{m+1}u_{m+1}]}$$

$$\left[\frac{p_m^2u_m}{p_m+p_{m+1}}+\frac{p_{m+1}^2u_{m+1}}{p_m+p_{m+1}}\right]=\sum_{i=1}^{m+1}\frac{p_i^2}{E[U]}\,u_i$$

REFERENCIAS

BELIS, M. y GUIASU, S.: "A quantitative–qualitative measure of information in cybernetic systems". I. E. E. E. Trans. Information Theory IT 14, pp. 593–594, 1968.

GIL, P.: "Información útil suministrada por una variable aleatoria sobre un campo de probabilidad y utilidad". *Trabajos de Estadística y de Investigación Operativa*, vol. 26, pp. 187–204, 1975.

GIL, M. A.: "Incertidumbre y utilidad" *Ph. Tesis Doctoral.* Universidad de Oviedo.

GUIASU, S.: *Information Theory with Aplications.* McGraw–Hill, New York, 1977.

GUIASU, S. y THEODORESCU, R.: *Incertitude et Information.* Les Presses de l'Université Laval, Quebec, 1971.

ONICESCU, O.: "Energie Informationnelle" *C. R. Acad. Sci.* Paris, Ser, A, 263, pp. 841–842, 1966.

PARDO, L.: *La Energía Informacional como fundamento de una Teoría de la Información.* Memoria presentada en el Instituto Universitario de Estadística e I. O. Madrid. 1977.

PARDO, L.: "Energía Informacional Util". *Trabajos de Estadística e Investigación Operativa,* vol. 32, pp. 85–94, 1981.

THEODORESCU, A.: "Energie Informationnelle et notions Apparentes". *Trabajos de Estadística e Investigación Operativa.* vol. 28, pp. 183–206, 1977.

SUMMARY

AXIOMATIC CHARACTERIZATION OF THE USEFUL INFORMATION ENERGY.

In this paper, we give a uniqueness theorem for the Useful Information Energy. This concept, Pardo 1977, evaluate the amount of information supplied by a probabilistic experiment, whose elementary events are characterized both their probabilities and by their utilities.

Key words: Usefu Information Energy, Probability and utility field.

AMS, 1980. Subject classification: 94A17.