ESTADÍSTICA ESPAÑOLA
núm. 108, 1985, págs. 117 a 152

Estimación mínimo cuadrática de modelos multiplicativos de series cronológicas.

por FRANCISCO JAVIER CALLEALTA BARROSO
Departamento de Estadística
Económico–Empresarial e I.O.
Universidad de Alcalá de Henares.

RESUMEN

En los estudios descriptivos de series temporales en los que se adoptan modelos de descomposición factorial de tipo multiplicativo, es común la utilización de métodos empíricos para la estimación de los parámetros del modelo, así como también es poco usual la aplicación para ello de otros métodos estadísticos que en otras circunstancias son preferidos.

En este trabajo se estudia la aplicación del método de estimación de mínimos cuadrados, que tanta profusión alcanza en estudios econométricos, al problema de la estimación paramétrica de modelos multiplicativos de series cronológicas, comparando finalmente sus resultados con los obtenidos con los métodos usualmente más utilizados.

Palabras clave: Estimación de mínimos cuadrados; series temporales; series cronológicas; estimación paramétrica; modelo multiplicativo de serie temporal; modelo multiplicativo de serie cronológica; estacionalidad estable.

1. INTRODUCCION

Si bien está suficientemente probada la mayor adaptabilidad al estudio de la evolución temporal de muchos sucesos económicos de los procedimientos derivados de la metodología de Box y Jenkins frente a los métodos tradicionales de descomposición en factores tendenciales, cíclicos, estacionales y accidentales, sin embargo, no ha sido aún desechada la información que este último enfoque pueda proporcionar de los fenómenos estudiados. Basta para convencerse de ello, dar una mirada a los distintos informes estadísticos emitidos periódicamente por entidades prestigiosas de la vida económica y observar como persisten numerosos casos de series estadísticas para los que sigue expresándose tales informaciones acerca de dichos factores.

Sin embargo, parece un poco contradictorio a priori ver cómo desde este último punto de vista, frente a los métodos tradicionales específicos de estimación que generalmente se utilizan (estimación en etapas distintas de los factores tendenciales y estacionales, métodos empíricos,...), está relativamente poco extendido el uso de los más estudiados y aconsejables desde una perspectiva puramente teórica métodos estadísticos de estimación que en otros problemas tan amplio uso y buena acogida poseen.

De entre estos métodos, es el de estimación por mínimos cuadrados uno de los que más profusión ha tenido en el estudio de modelos económicos sobre todo de tipo lineal, quizás porque desde una óptica estrictamente práctica, unido a su simple y clara interpretación geométrica y a que en algunos casos bajo ciertas hipótesis del modelo considerado, sus estimaciones puedan coincidir con las de máxima verosimilitud con todas las consecuencias deseables que de ello se deriva, tratándose de modelos de tipo lineal, sus desarrollos no suelen ser excesivamente complejos y por consecuencia, su aplicación suele ser operativamente sencilla.

En este sentido, el objetivo del presente trabajo es desarrollar este método de estimación (estimación por mínimos cuadrados) en aquellos modelos tradicionales de series cronológicas de tipo multiplicativo contrastando en base a su eficacia y a su operatividad los resultados obtenidos frente a aquellos derivados de la aplicación de los métodos tradicionalmente empleados.

El estudio se centra en los distintos modelos multiplicativos de series cronológicas con tendencia lineal, variación cíclica inapreciable durante el intervalo temporal de observación de la serie, variación estacional estable y con variaciones accidentales aleatorias operando de forma multiplicativa o aditiva.

Dada la usual costumbre en los métodos tradicionales de estimación para tales series cronológicas de normalizar las variaciones estacionales de cada periodo para que su media aritmética sea la unidad, hemos considerado asimismo tal posibilidad y estudiado sus consecuencias.

2. EL MODELO GENERAL: ELEMENTOS, HIPOTESIS Y FORMULACION.

Tradicionalmente, el modelo de serie cronológica más comúnmente adoptado es el que corresponde a la descomposición factorial del proceso estocástico "Medición de la observación de un fenómeno en el tiempo" como producto de cuatro factores explicativos: Tendencia secular, Variaciones cíclicas, Variaciones estacionales y Variaciones accidentales.

Formalmente, el modelo viene expresado como:

$$Y(t) = T(t) \times C(T) \times S(t) \times A(t) \tag{2.1.}$$

donde notaremos por:

t, variable exógena del modelo de serie cronológica (S.C.) "tiempo".
$Y(t)$, valor de la S.C. en el instante de tiempo t.
$T(t)$, valor de la función tendencia secular de la S.C. en el instante t.
$C(t)$, valor de la función variación cíclica de la S.C. en el instante t.
$S(t)$, valor de la función variación estacional de la S.C. en t.
$A(t)$, valor del proceso estocástico variación accidental de la S.C. en t.

Supondremos en el caso de estudio que nos ocupa, que la función variación cíclica de la S.C. es tal que sus variaciones de valor son prácticamente apreciables solo en muy amplios intervalos de tiempo, de forma que para el intervalo de observación que dispondremos podremos suponer que dicho factor es una función constante, y sin pérdida de generalidad, que dicha constante valdrá uno sin más que integrar su valor real en la función tendencia secular, quedando reducida la formulación del modelo a:

$$Y(t) = T(t) \times S(t) \times A(t) \tag{2.2.}$$

Supondremos asímismo en el presente trabajo que cada ciclo o período estacional tendrá una duración temporal τ, y que conocemos el número de estaciones K que lo componen, de forma que los datos observados de la realidad podremos disponerlos tabulados de la forma habitual:

ciclos / estaciones	1	2	3	...	j	...	m
1	N.M.	y_{12}	y_{13}	...	y_{1j}	...	y_{1m}
2	N.M.	y_{22}	y_{23}	...	y_{2j}	...	y_{2m}
.	.	.	.		.		.
.	.	.	.		.		.
.	.	.	.		.		.
r	y_{r1}	y_{r2}	y_{r3}	...	y_{rj}	...	y_{rm}
.	.	.	.		.		.
.	.	.	.		.		.
.	.	.	.		.		.
s	y_{s1}	y_{s2}	y_{s3}	...	y_{sj}	...	N.M.
.							
.							
.							
K	y_{K1}	y_{K2}	y_{K3}	...	y_{Kj}	...	N.M.

(2.3.)

Puede ocurrir que en el primer y/o último ciclo estacional m, exista un cierto número de estaciones en las que no fué o aún no ha sido medido (N.M.) el fenómeno al que corresponde la S.C. en estudio.

Cada estación i–ésima así establecida, puede tener una duración temporal a_i correspondientemente igual en todos los ciclos, siendo:

$$a_i > 0 \quad \text{y} \quad \sum_{i=1}^{K} a_i = \tau \tag{2.4.}$$

Notaremos por y_{ij}, $i \in \{1, 2, ..., K\}$, $j \in \{1, 2, ..., m\}$ el valor del fenómeno en estudio observado en la estación i–ésima del ciclo j–ésimo.

Cada estación de un ciclo la caracterizaremos por un instante de tiempo con relación a la numeración natural de los ciclos, y representaremos por t_{ij} el instante de tiempo de la estación i–ésima del ciclo j–ésimo al que se asigna el valor observado y_{ij} (generalmente la marca de clase del intervalo temporal de la estación).

Supondremos que se han observado m ciclos y llamaremos $\Omega(i)$ al conjunto de instantes de tiempo correspondientes a la estación i–ésima en los que se ha efectuado alguna observación.

$$\Omega(i) = \{ t_{ij} \,;\, j=1, 2, ..., m \ \text{si existe} \ y_{ij} \} \tag{2.5.}$$

Consideraremos que la función tendencia secular T(t) será lineal, y por tanto responderá a la expresión formal:

$$T(t) = a + b.t \qquad (2.6.)$$

si bien, cuando la supongamos conocida, evidentemente esta hipótesis no será en absoluto necesaria.

Con respecto a la función factor estacional, supondremos que será estable a lo largo del tiempo para cada estación (función periódica de periodo un ciclo estacional) y que tomará la forma S(t) = S_i si t es un instante que está en una estación i, i=1, 2,..., K, siendo S_i un número real positivo que representa el tanto por uno de variación que se produce en una estación i con respecto a su tendencia secular. Así pues, podemos formalizar esta función como:

$$S(t) = \sum_{i=1}^{K} S_i.E_i(t) \quad \text{siendo} \quad \left\{ \begin{array}{l} E_i(t) = \left\{ \begin{array}{l} 0 \text{ si } t \notin \text{ a la estación } i \\ 1 \text{ si } t \in \text{ a la estación } i \end{array} \right. \\ S_i > 0;\ i=1, 2,..., K \end{array} \right. \qquad (2.7.)$$

Finalmente, supondremos que el proceso aleatorio que caracteriza a las variaciones accidentales es de la forma:

$$A(t) = 1 + \varepsilon(t) \qquad (2.8.)$$

siendo $\varepsilon(t)$ un perfecto ruido blanco, de forma que en cada instante de tiempo, el factor aleatorio A(t) es una variable aleatoria ε con distribución probabilística Normal de media 1 y desviación típica σ, y que es independiente e identicamente distribuida con respecto a la de cualquier otro instante de tiempo.

Entonces, el modelo general multiplicativo de serie cronológica con estacionalidad estable y observada en corto plazo de tiempo, toma la forma:

$$Y(t) = T(t) \,.\, \sum_{i=1}^{K} S_i.E_i(t) \,.\, A(t) \,,\ A(t) = \varepsilon \in N(1, \sigma^2) \ iid \ \forall t \qquad (2.9.)$$

Nuestro objetivo en este trabajo es el estudiar las distintas estimaciones que nos aportan los llamados métodos de estimación de mínimos cuadrados.

Asi pues, si consideramos como valor estimado de la S.C. en un instante de tiempo t la expresión

$$\hat{Y}(t) = \hat{T}(t) \, . \sum_{i=1}^{k} \hat{S}_i . E_i(t) \, , \tag{2.10.}$$

nuestro problema residirá entonces en encontrar aquellos parámetros $\hat{S}_1$, $\hat{S}_2$,..., $\hat{S}_K$ y aquellos que pudiesen intervenir en el factor tendencia secular $\hat{T}(t)$, de forma que sea mínima la suma de residuos

$$\sum_{i=1}^{K} \sum_{j \in \Omega(i)} \{ y_{ij} - \hat{Y}(t_{ij}) \}^2 \tag{2.11.}$$

que equivalentemente conduce a minimizar

$$\sum_{i=1}^{K} \sum_{j \in \Omega(i)} \{ y_{ij} - \hat{T}(t_{ij}) \, . \sum_{i=1}^{K} \hat{S}_r . E_r(t_{ij}) \}^2 \tag{2.12.}$$

o lo que tras hacer uso de la tabulación realizada de los datos, es lo mismo que minimizar la expresión

$$\sum_{i=1}^{K} \sum_{j \in \Omega(i)} \{ y_{ij} - \hat{T}(t_{ij}) \, . \, \hat{S}_i \}^2 \tag{2.13.}$$

En lo sucesivo, denominaremos a esta suma, suma de cuadrados de desviaciones y la representaremos por $SE(\overrightarrow{\theta})$, función esta que dependerá de los parámetros componentes de $\overrightarrow{\theta}$ de que depende nuestro modelo y los cuales deseamos estimar.

Adicionalmente, estudiaremos también el modelo multiplicativo mixto de S.C. en el que se supone explicada la serie como producto de los factores tendencia secular, variación cíclica y variación estacional más un factor aditivo explicativo de la variación accidental.

En este caso el modelo general sería:

$$Y(t) = T(t) \times C(t) \times S(t) + A(t) \tag{2.14.}$$

que en nuestro caso, con las hipótesis vistas hasta ahora y con la salvedad de que ahora el proceso estocástico A(t) es el propio ruido blanco $\varepsilon(t)$ antes señalado, queda como

$$Y(t) = T(t) \, . \sum_{i=1}^{K} S_i . E_i(t) + A(t) \quad , \quad A(t) = \varepsilon \in N(0, \sigma^2) \;\; iid \; \forall t \tag{2.15.}$$

El método de estimación será exactamente el mismo antes expuesto y por tanto, las estimaciones que obtendremos también serán las mismas.

Sin embargo, para este último modelo, es de notar que las estimaciones a que llegaremos, coincidirán con las estimaciones de máxima verosimilitud, poseyendo por tanto todas aquellas propiedades deseables que estas estimaciones poseen. Ello se deduce obviamente de tener en cuenta que bajo nuestras hipótesis, el valor de la S.C. en cada instante de tiempo t, Y(t), es una variable aleatoria con distribución Normal de media y varianza

$$\begin{aligned} \mu_y(t) &= T(t) \, . \sum_{i=1}^{K} S_i . E_i(t) \\ \sigma_y^2(t) &= \sigma^2 \end{aligned} \tag{2.16.}$$

por lo que la función de verosimilitud para las observaciones realizadas de la S.C. sería:

$$L\{ y_{ij}, j \in \Omega(i), i{=}1, 2, \ldots, K, \overrightarrow{\theta} \} = \prod_{i=1}^{K} \sum_{j \in \Omega(i)} \{ \frac{1}{\sqrt{2\pi} \, . \, \sigma} \, . \, exp \, [- \frac{(y_{ij} - \mu_y(t_{ij}))^2}{2\sigma^2}] \} =$$

$$= (2\pi\sigma^2)^{-(\sum_{i=1}^{K} card(\Omega(i)))/2} \, . \, exp \, (- \frac{SE(\overrightarrow{\theta})}{2\sigma^2}) \, , \tag{2.17.}$$

de donde se deduce que llegaríamos a la misma solución maximizándo ésta función que minimizando la función SE($\overrightarrow{\theta}$) para los distintos posibles valores de $\overrightarrow{\theta}$.

A continuación pasamos a estudiar las distintas estimaciones que se derivan de estos modelos y las cuales hemos dividido además respondiendo a dos hipótesis adicionales más.

En primer lugar, la suposición del conocimiento o no a priori de la función tendencia secular, y en segundo lugar, la necesidad o no de la normalización de los factores S_1, S_2,..., S_K de variación estacional. Con respecto a esta segunda hipótesis, es de notar que en relación a la minimización de $SE(\overrightarrow{\theta})$, evidentemente puede conducir, y en la mayoría de los casos conduce realmente, a un incremento de valor de esta función en el punto paramétrico solución del problema. Sin embargo, dada la usual costumbre en los métodos tradicionales de tal normalización, hemos asimismo considerado tal posibilidad y estudiado sus consecuencias para los distintos métodos derivados que a continuación exponemos.

3. ESTIMACION EN MODELOS CON TENDENCIA CONOCIDA.

En los distintos modelos que vamos a estudiar a continuación, la función tendencia $T(t)$ es conocida para todos los instantes de observación de la S.C., y nuestro objetivo será encontrar aquellos valores de $S_1, S_2, \ldots, S_K$ asociados a la función de variación estacional tales que hagan mínima la suma de cuadrados de desviaciones $SE(\overrightarrow{\theta})$, cuya expresión es la dada en (2.13).

Así pues, el problema es:

$$\text{Encontrar } \hat{S}_1, \hat{S}_2, \ldots, \hat{S}_K;\ S_i \in R^+ - \{0\},\ i=1, 2, \ldots, K \text{ tales que} \tag{3.1.}$$
$$SE(\hat{S}_1, \hat{S}_2, \ldots, \hat{S}_K) \leq SE(S_1, S_2, \ldots, S_K)\ \ \forall S_i \in R^+ - \{0\},\ i=1, 2, \ldots, K$$

En este caso, la función $SE(\overrightarrow{\theta}) = SE(S_1, S_2, \ldots, S_K)$ posee derivadas parciales segundas continuas en el conjunto abierto $(R^+ - \{0\}) \times (R^+ -; \quad \{0\})$ K) $(R^+ - \{0\})$, por lo que podremos encontrar la solución al problema derivando.

MODELO I: Sin condiciones de normalización sobre las variaciones estacionales.

Las ecuaciones normales asociadas a $SE(\overrightarrow{\theta})$ son:

$$\frac{\partial SE(S_1, S_2, \ldots, S_k)}{\delta S_r} = -2 \sum_{j \in \Omega(r)} \{y_{rj} T(t_{rj}) - T(t_{rj})^2 S_r\} = 0;\ r=1, 2, \ldots, K \tag{3.2.}$$

y su matriz Hessiana $((H_{ij}))_{K \times K}$ es tal que

$$H_{ij} = \begin{cases} 0 & si\ i \neq j \quad ;\ i,j \in \{1, 2, \ldots, K\} \\ 2 \sum_{r \in \Omega(i)} T(t_{ir})^2 & si\ i=j \end{cases} \tag{3.3.}$$

de donde deducimos que la solución de (3.2.),

$$S_r = \frac{\sum_{j \in \Omega(r)} y_{rj}\, T(t_{rj})}{\sum_{j \in \Omega(r)} T(t_{rj})^2} \; ; \; r=1, 2,..., K \qquad (3.4.)$$

minimiza la función $SE(\overrightarrow{\theta})$ y es la estimación que buscábamos.

MODELO II: Con condiciones de normalización sobre las variaciones estacionales.

En este caso debe verificarse además la condición adicional $\sum_{i=1}^{K} S_i = K$.

Utilizando el método de los multiplicadores de Lagrange, la función Lagrangiana sería:

$$\phi(S_1, S_2,..., S_K, \lambda) = SE\,(S_1, S_2,..., S_K) + \lambda\,(\sum_{i=1}^{K} S_i - K) \qquad (3.5.)$$

de donde el sistema de ecuaciones a resolver es:

$$\frac{\partial \phi (S_1, S_2 ,..., S_K,\lambda)}{\delta S_r} = -2 \sum_{j \in \Omega(r)} \{y_{rj}T(t_{rj}) - T(t_{rj})^2 S_r\} + \lambda = 0; \; r=1, 2,..., K$$
$$\frac{\partial \phi (S_1, S_2 ,..., S_K,\lambda)}{\delta S_r} = \sum_{i=1}^{K} S_i - K = 0 \qquad (3.6.)$$

Si llamamos:

$$TY(r) = \sum_{j \in \Omega(i)} y_{rj} T(t_{rj}) \; ; \; T2(r) = \sum_{j \in \Omega(i)} T(t_{rj})^2 \qquad (3.7.)$$

para $r=1,2,...,K$, el sistema puede expresarse matricialmente como:

$$\begin{bmatrix} T2(1) & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1/2 \\ 0 & T2(2) & 0 & \cdots & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & T2(3) & \cdots & 0 & 1/2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & T2(K) & 1/2 \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} S_1 \\ S_2 \\ S_3 \\ \vdots \\ S_K \\ \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} TY(1) \\ TY(2) \\ TY(3) \\ \vdots \\ TY(K) \\ K \end{bmatrix} \qquad (3.8.)$$

de donde sumando a la ecuación K+1 la ecuación i–ésima multiplicada por $-1/T2(i)$, $i=1, 2,\ldots,K$, y despejando λ, obtendremos que:

$$\lambda = -2. \frac{K - \sum_{i=1}^{K} \frac{TY(i)}{T2(i)}}{\sum_{i=1}^{K} \frac{1}{T2(i)}} \tag{3.9.}$$

y recurrentemente,

$$S_i = \frac{TY(i) - \lambda/2}{T2(i)} \quad ; i=1, 2,\ldots,K \tag{3.10.}$$

La situación que acabamos de ver, en la que se conoce a priori la función tendencia del modelo, suele con alguna frecuencia estudiarse comenzando por eliminar de los datos observados la influencia que dicha tendencia secular pudiese tener. Para ello se dividen los valores observados de la S.C. en cada instante de tiempo por el valor correspondiente de la tendencia secular en ese mismo instante.

De esta forma, los modelos multiplicativos expresados en (2.1.) y (2.14.) adaptados a nuestras hipótesis, pueden expresarse entonces como:

$$Z(t) = S(t) \times A(t) \quad y \quad Z(t) = S(t) + A'(t) \tag{3.11.}$$

respectivamente, donde consecuentemente con tales hipótesis realizadas en el apartado segundo de este trabajo, el nuevo factor $A'(t)$ para cada instante de tiempo t no es otra cosa que una nueva variable aleatoria normal con media 0 y desviación típica $\sigma / T(t)$, e independiente de la correspondiente a otro instante de tiempo distinto.

Sin embargo, en este caso, el factor aleatorio ya no tiene varianza constante, por lo que no podemos asegurar que las estimaciones de mínimos cuadrados para este modelo coincidan con las de máxima verosimilitud.

Nos hemos interesado asimismo por esta forma de enfocar el problema y a continuación desarrollamos los dos nuevos modelos de estimación de mínimos cuadrados que de ella se derivan.

MODELO I.a: Con eliminación de tendencia y sin condiciones de normalización sobre las variaciones estacionales.

En este caso, la función que debemos minimizar es:

$$SE_a(S_1, S_2,...,S_K) = \sum_{i=1}^{K} \sum_{j \in \Omega(i)} \{z_{ij}-S_i\}^2 \qquad (3.12.)$$

siendo $z_{ij} = y_{ij}/T(t_{ij})$, $j \in \Omega(i)$, i=1, 2,...,K.

Las ecuaciones normales asociadas serán:

$$\frac{\partial SE_a(S_1,S_2,...,S_K)}{\partial S_r} = -2 \sum_{j \in \Omega(r)} \{ z_{rj}-S_r \} = 0 \ ; \ r=1, 2,...,K \qquad (3.13.)$$

y la matriz Hessiana $((H_{ij}))_{K \times K}$ es tal que:

$$H_{ij} = \begin{cases} 0 & si\ i \neq j \\ 2\ card\,(\Omega(i)) & si\ i=j \end{cases} \qquad (3.14.)$$

de donde se deduce que la solución que realmente minimiza el sistema (3.13) es:

$$S_r = \frac{\sum_{j \in \Omega(r)} z_{rj}}{card(\Omega(r))} \ ; \ r=1, 2,...,K \qquad (3.15.)$$

que observamos no es si no el valor medio de la serie una vez eliminada la tendencia, para el periodo r correspondiente.

MODELO II.a: Con eliminación de tendencia y condiciones de normalización sobre las variaciones estacionales.

Análogamente a como se razonó en el caso del modelo II, el sistema de ecuaciones a resolver es:

$$\frac{\partial \varnothing(S_1,S_2,...,S_K,\lambda)}{\partial S_r} = -2 \sum_{j \in \Omega(r)} \{ z_{rj}-S_r \} + \lambda = 0 \ ; \ r=1, 2,...,K$$

$$\frac{\partial \phi(S_1,S_2,\ldots,S_K,\lambda)}{\partial S_\lambda} = \sum_{i=1}^{K} S_i - K = 0 \tag{3.16.}$$

Llamando ahora:

$$M(r) = card(\Omega(r)) \quad ; \quad Z(r) = \sum_{j \in \Omega(r)} z_{rj} \tag{3.17.}$$

para r=1, 2,...,K, el sistema de ecuaciones puede expresarse matricialmente como:

$$\begin{bmatrix} M(1) & 0 & 0 & \ldots & 0 & 1/2 \\ 0 & M(2) & 0 & \ldots & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & M(3) & \ldots & 0 & 1/2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\vdots\vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & M(K) & 1/2 \\ 1 & 1 & 1 & \ldots & 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} S_1 \\ S_2 \\ S_3 \\ \vdots \\ S_K \\ \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z(1) \\ Z(2) \\ Z(3) \\ \vdots \\ Z(K) \\ K \end{bmatrix} \tag{3.18.}$$

Sumando a la ecuación K+1 la ecuación i–ésima multiplicada por $-1/M(i)$, i=1, 2,...,K, obtendremos tras despejar:

$$\lambda = -2 \frac{K - \displaystyle\sum_{i=1}^{K} \frac{Z(i)}{M(i)}}{\displaystyle\sum_{i=1}^{K} \frac{1}{M(i)}} \tag{3.19.}$$

y recurrentemente,

$$S_i = \frac{Z(i) - \lambda/2}{M(i)} \quad ; \; i=1, 2,\ldots,K \tag{3.20.}$$

4. ESTIMACION EN MODELOS CON TENDENCIA LINEAL DESCONOCIDA.

En los siguientes métodos que vamos a ver, la función tendencia secular es desconocida, pero suponemos que es de forma lineal en el tiempo por lo que la expresaremos como:

$$\mathrm{T}(t) = a + bt \ ; \ a,b \in \mathrm{R} \tag{4.1.}$$

y así pues, los correspondientes modelos multiplicativos de S.C. objetos de nuestro estudio serán:

$$\mathrm{Y}(t) = (a+bt) \, . \, \sum_{i=1}^{\mathrm{K}} \mathrm{S}_i.\mathrm{E}_i(t).\mathrm{A}(t) \ , \ \mathrm{A}(t)=\varepsilon \in \mathrm{N}(1,\sigma^2) \ iid \ \forall \ t \tag{4.2.}$$

así como

$$\mathrm{Y}(t) = (a+bt) \, . \, \sum_{i=1}^{\mathrm{K}} \mathrm{S}_i.\mathrm{E}_i(t)+\mathrm{A}(t) \ , \ \mathrm{A}(t)=\varepsilon \in \mathrm{N}(0,\sigma^2) \ iid \ \forall \ t \tag{4.3.}$$

Y nuestro problema no es otro sino encontrar aquellos valores paramétricos de a y b correspondientes a la tendencia lineal de la S.C., y de $\mathrm{S}_1, \mathrm{S}_2,\ldots,\mathrm{S}_K$, parámetros éstos como hasta ahora asociados a la función de variación estacional, tales que hagan mínimo la suma de cuadrados de desviaciones $\mathrm{SE}(\overrightarrow{\theta})$ que en la situación actual puede expresarse como:

$$\mathrm{SE}(\overrightarrow{\theta}) = \mathrm{SE}(a,b,\mathrm{S}_1,\mathrm{S}_2,\ldots,\mathrm{S}_K) = \sum_{i=1}^{\mathrm{K}} \sum_{j \in \Omega(i)} \{y_{ij} - (a+bt_{ij})\mathrm{S}_i\}^2 \tag{4.4.}$$

El problema ahora es por tanto,

Encontrar $\hat{a}, \hat{b}, \hat{\mathrm{S}}_1, \hat{\mathrm{S}}_2,\ldots, \hat{\mathrm{S}}_K$; $\hat{a}, \hat{b} \in \mathrm{R}$; $\hat{\mathrm{S}}_i \in \mathrm{R}^+ - \{0\}$, i=1,2,...,K tales que

$$\mathrm{SE}(\hat{a}, \hat{b}, \hat{\mathrm{S}}_1, \hat{\mathrm{S}}_2,\ldots, \hat{\mathrm{S}}_K) \leq \mathrm{SE}(a, b, \mathrm{S}_1, \mathrm{S}_2,\ldots, \mathrm{S}_K) \tag{4.5.}$$

$$\forall \ a,b \in \mathrm{R} \ ; \ \forall \ \mathrm{S}_i \in \mathrm{R}^+ - \{0\} \ , \ i=1,2,\ldots,\mathrm{K}$$

Análogamente a como ocurría en el tercer apartado de este trabajo, la función paramétrica $\mathrm{SE}(\overrightarrow{\theta})$ posee las convenientes propiedades para poder abordar el problema con ayuda de las propiedades que la derivación de tal función posee.

MODELO III: Sin restricciones de normalización sobre las variaciones estacionales.

En este caso, el sistema de ecuaciones normales asociado a (4.4.) es:

$$\frac{\partial \mathrm{SE}(a,b,S_1,S_2,\ldots,\mathrm{S}_K)}{\partial a} = -2 \sum_{i=1}^{\mathrm{K}} \sum_{j \in \Omega(i)} \{ y_{ij} - (a+bt_{ij}) \, \mathrm{S}_i \} \, \mathrm{S}_i = 0$$

$$\frac{\partial \mathrm{SE}(a,b,S_1,S_2,\ldots,S_K)}{\partial b} = -2 \sum_{i=1}^{K} \sum_{j \in \Omega(i)} \{ y_{ij} - (a+bt_{ij})\, S_i \}\, t_{ij}\, S_i = 0 \quad (4.6.)$$

$$\frac{\mathrm{SE}(a,b,S_1,S_2,\ldots,S_K)}{\delta S_r} = -2 \sum_{j \in \Omega(r)} \{y_{rj}-(a+bt_{rj})S_r\}\, (a+bt_{rj}) = 0 \ ; \ r=1,2,\ldots,K$$

Podemos simplificar estas ecuaciones desde un punto de vista operativo con la siguiente notación:

$$\mathrm{Y}(i) = \sum_{j \in \Omega(i)} y_{ij} \ ; \ \mathrm{YT}(i) = \sum_{j \in \Omega(i)} y_{ij}\, t_{ij} \ ; \ \mathrm{M}(i) = card\, (\Omega(i))$$

$$\mathrm{T}(i) = \sum_{j \in \Omega(i)} t_{ij} \ ; \ \mathrm{T2}(i) = \sum_{j \in \Omega(i)} t_{ij}^2 \ ; \ i=1,2,\ldots,K \quad (4.7.)$$

El sistema entonces puede expresarse de la forma:

$$\left\{ \begin{array}{l} ec(1) \equiv \sum_{i=1}^{K} \{\mathrm{Y}(i)-(a\mathrm{M}(i)+b\mathrm{T}(i))\mathrm{S}_i\}\, \mathrm{S}_i = 0 \\ ec(2) \equiv \sum_{i=1}^{K} \{\mathrm{YT}(i)-(a\mathrm{T}(i)+b\mathrm{T2}(i))\mathrm{S}_i\}\mathrm{S}_i = 0 \\ ec(r+2) \equiv a\mathrm{Y}(r)+b\mathrm{YT}(r)-\mathrm{S}_r\, \{a^2\mathrm{M}(r) + b^2\mathrm{T2}(r) + 2ab\mathrm{T}(r)\} = 0; r=1,2,\ldots,\mathrm{K} \end{array} \right. \quad (4.8.)$$

Sin embargo, observemos que la suma de las últimas r ecuaciones conduce a

$$\sum_{i=1}^{K} ec(r+2).\mathrm{S}_r = a.ec(1) + b.ec(2) \quad (4.9.)$$

de donde deducimos que las K+2 ecuaciones homogéneas del sistema a resolver son funcionalmente dependientes.

Existe pues una curva de soluciones del sistema de ecuaciones normales, y si pretendemos encontrar una única solución en concreto, deberemos imponer una nueva restricción adicional. Así nos encontramos ante el dilema de ¿qué solución elegir? y por tanto de qué restricción elegir para obtenerla. Cualquier restricción que formara ecuación funcionalmente independiente de las K+1 funcionalmente independientes derivadas de (4.8.) valdría. Sin embargo, parece lógico elegir una condición de normalización que nos ordene en algún sentido dichos parámetros.

Impongamos pues la restricción $\sum_{i=1}^{K} S_i = K$.

El sistema a resolver entonces es:

$$\left\{\begin{array}{l} \sum_{i=1}^{K} \{Y(i) - (aM(i)+bT(i))S_i\} S_i = 0 \\ \sum_{i=1}^{K} \{YT(i) - (aT(i)+bT2(i))S_i\} S_i = 0 \\ aY(r)+bYT(r)-S_r \{a^2 M(r)+b^2T2(r)+2abT(r)\} = 0 \; ; \; r=1,2,\ldots,K-1 \\ \sum_{i=1}^{K} S_i = K \end{array}\right. \quad (4.10.)$$

K+2 ecuaciones independientes para K+2 parámetros $a, b, S_1, S_2, \ldots, S_K$.

Este sistema es obviamente un sistema no lineal de ecuaciones y requiere métodos numéricos para su resolución. Como una buena solución inicial, proponemos aquellos valores de a y b estimados del conjunto de datos inicial como se suele hacer en una primera etapa de los métodos clásicos más tradicionales (ajuste de mínimos cuadrados de los valores medios de la S.C. en cada ciclo), a continuación, como valores para $S_1, S_2, \ldots, S_{K-1}$, los deducidos directamente de las K–1 ecuaciones que van de la tercera a la (K+1)–ésima del sistema (4.10.), y finalmente para S_K, la derivada de la ecuación (K+2)–ésima con los valores previamente estimados.

Es interesante notar que en este caso, el hecho de normalizar los coeficientes de la función variación estacional no aumenta en absoluto la suma de cuadrados de las desviaciones $SE(\overrightarrow{\theta})$, puesto que dicha normalización la realizamos exclusivamente con el fin de obtener una sóla de las infinitas soluciones que el problema presenta. Así pues, no es en este caso esta normalización de los coeficientes una práctica teóricamente indeseable como en otras situaciones, sino más bien casi una necesidad dado nuestro deseo de obtener una única solución y hecha la consideración de que es ésta la mejor de las restricciones que conserva la independencia con las demás ecuaciones del sistema no lineal.

MODELO IV: Con restricciones de normalización sobre las variaciones estacionales.

En este caso, a priori imponemos la condición de normalización $\sum_{i=1}^{K} S_i = K$, *a* los parámetros que buscamos.

Aplicando el método de los multiplicadores de Lagrange, la función Lagrangiana es:

$$\varnothing\,(a,b,S_1,S_2,\ldots,S_K,\lambda) = \sum_{i=1}^{K} \sum_{j\in\Omega(i)} \{ y_{ij}-(a+bt_{ij})\,S_i \}^2 + \lambda \{ \sum_{i=1}^{K} S_i - K \} \quad (4.11.)$$

y el conjunto de ecuaciones normales asociado es:

$$\left\{\begin{array}{ll}
\dfrac{\partial\,(a,b,S_1,S_2,\ldots,S_K,\lambda)}{\partial a} = -2 \sum_{i=1}^{K} \sum_{j\in\Omega(i)} \{y_{ij} - (a+bt_{ij})\,S_i\}\,S_i = 0 & \\
\dfrac{\partial\,(a,b,S_1,S_2,\ldots,S_K,\lambda)}{\partial b} = -2 \sum_{i=1}^{K} \sum_{j\in\Omega(i)} \{y_{ij} - (a+bt_{ij})\,S_i\}\,S_i\,t_{ij} = 0 & (4.6.)\\
\dfrac{\partial\,(a,b,S_1,S_2,\ldots,S_K,\lambda)}{\partial S_r} = -2 \sum_{j\in\Omega(r)} \{y_{rj}-(a+bt_{rj})\,S_r\}\,(a+bt_{rj}) + \lambda = 0 \;;\; r=1,2,\ldots,K & \\
\dfrac{\partial\,(a,b,S_1,S_2,\ldots,S_K,\lambda)}{\partial \lambda_r} = \sum_{i=1}^{K} S_i - K = 0 & (4.12.)
\end{array}\right.$$

que más simplificado, y con la misma notación expuesta en el modelo III (4.7.), puede expresarse como:

$$\left\{\begin{array}{ll}
ec(1) \equiv \sum_{i=1}^{K} \{Y(i) - (aM(i)+bT(i))S_i\}\,S_i = 0 & \\
ec(2) \quad \sum_{i=1}^{K} \{YT(i) - (aT(i)+bT2(i))\,S_i\}\,S_i = 0 & \\
ec(r+2) \equiv aY(r)+bYT(r) - S_r\,\{a^2M(r)+b^2T2(r)+2abT(r)\} - \lambda/2 = 0 \;;\; r=1,2,\ldots,K & \\
ec(K+3) \equiv \sum_{i=1}^{K} S_i - K = 0 & (4.13.)
\end{array}\right.$$

Sin embargo, puesto que se verifica la igualdad:

$$\sum_{i=1}^{K} ec(r+2).S_r = a.ec(1)+b.ec(2) - K\lambda/2 = 0 \quad (4.14.)$$

entonces, necesariamente $\lambda=0$ de donde como ocurría en el modelo III, debemos eliminar alguna ecuación redundante con las demás, desembocándo el sistema en el mismo sistema (4.10.), ya que aquí la ecuación de normalización está incluida a priori en el sistema sin otra posibilidad. Su resolución por tanto, irá en la misma vía de la del modelo III ya expuesta y del cual, junto con los demás modelos estudiados, pasamos a continuación a estudiar su eficacia y operatividad.

5. EVALUACION DE LOS METODOS DE ESTIMACION DE MINIMOS CUADRADOS: CONCLUSIONES.

En este apartado vamos a comparar la bondad de los métodos desarrollados previamente, tanto entre sí como con los dos métodos más tradicionalmente usados en la resolución del problema que nos ocupa: el método de estimación por razón a la tendencia (RT) y el método de estimación de la media aritmética (MA).

En estos dos últimos métodos, la estimación de los parámetros correspondientes a las funciones tendencia secular y variación estacional se realiza en dos etapas claramente diferenciadas: En la primera, estimamos la tendencia mediante un ajuste lineal de mínimos cuadrados para los valores medios de los ciclos como función del tiempo, y en la segunda, dando por definitiva tal estimación, y a partir de ella, bien eliminando la influencia tendencial de la serie de datos original en el primero de los métodos, o bien calculando un ciclo medio en comportamiento en el segundo, estimamos los coeficientes de variación estacional.

La comparación se ha realizado en las dos líneas reseñadas correspondientes a la aplicación de los métodos para el modelo multiplicativo puro (factor aleatorio multiplicativo) y para el modelo multiplicativo mixto (factor aleatorio aditivo).

Para ello se ha realizado un programa de ordenador capaz de generar a voluntad conjuntos de observaciones aleatorias provenientes de un modelo multiplicativo de S.C. con unos parámetros característicos dados a priori, y sobre los cuales han sido aplicados los distintos métodos de estimación que hemos comparado, confrontando finalmente las estimaciones obtenidas con los parámetros reales, y midiendo la bondad de la estimación mediante un índice de eficiencia definido a tal efecto, cuyos valores asociados a cada método y S.C. generada han servido de base para estudios estadísticos de la varianza entre los distintos métodos y de comparaciones múltiples entre ellos.

Las distintas rutinas que integran el programa han sido codificadas en FORTRAN 77 y los cálculos han sido realizados en doble precisión a fin de evitar en lo posible problemas de tipo computacional que, al aplicar los métodos numéricos que hemos necesitado, pudiesen haber aparecido.

El proceso comienza generando aleatoriamente a y b, términos éstos independiente y pendiente de la tendencia lineal de la S.C. a generar, así como los índices de variación estacional S_1, S_2,..., S_K con las únicas condiciones exigidas de ser positivos y sumar K. Sobre esta base, para un valor de $\sigma > 0$ predeterminado, generamos una muestra aleatoria de residuos accidentales según una distribución normal de varianza σ^2 y media 1 ó 0 según el modelo a estudiar fuese el multiplicativo puro o el mixto respectivamente, y construimos la serie de datos que simula la realización de la S.C. según el modelo tratado sea el dado en (2.1.) ó (2.14.).

Sobre esta serie generada, aplicamos los distintos métodos que vamos a comparar bajo dos hipótesis de trabajo más: La primera suponiendo que desconocemos la función tendencia y por consiguiente necesitamos estimarla, y la segunda, cuando conocemos dicha función.

Bajo la primera hipótesis hemos realizado la estimación de la S.C. mediante todos los métodos que corresponden a los modelos vistos y que notaremos respectivamente como métodos I, II, I.a, II.a, III, IV, y los tradicionales RT y MA. Bajo la segunda hipótesis, los métodos III y IV no son aplicables puesto que estiman todos los parámetros en una única etapa y por tanto nos hemos limitado a estudiar el resto.

Con relación a las rutinas que aplican los métodos de estimación, cabe resaltar que para los métodos III y IV, para los cuales era necesaria la resolución de sistemas no lineales de ecuaciones, hemos empleado el método de Newton–Raphson dado que su factor de convergencia de tipo cuadrático lo hace uno de los más preferibles para estos problemas. A fin de obviar la necesidad de dotar al método de un punto inicial cercano a la solución, hemos modificado dicho método aplicando el algoritmo de perturbación de los parámetros.

Finalmente, para comparar la eficacia de tales métodos, hemos definido un índice de su eficiencia de la siguiente manera:

Si llamamos $\vec{\theta} \equiv (A, B, S_1, S_2, \ldots, S_K)$ a los parámetros reales de la función lineal tendencia y de la función variación estacional para las K estaciones típicas de la serie que queremos estimar, y análogamente llamamos $\hat{\theta} = (\hat{A}, \hat{B}, \hat{S}_1, \hat{S}_2, \ldots, \hat{S}_K)$ a los correspondientes parámetros estimados por alguno de los métodos aplicados, entonces definiremos como índice de eficiencia del método para esa S.C., la cantidad

$$I_{ef}(\vec{\theta},\vec{\hat{\theta}}) = [\sum_{i=1}^{K} [\frac{\hat{S}_i - S_i}{S_i}]^2 + [\frac{\hat{A} - A}{A}]^2 + [\frac{\hat{B} - B}{B}]^2]^{1/2} \tag{5.1.}$$

Este índice representa el módulo del vector de errores relativos de estimación para los correspondientes parámetros, y es claramente un índice estadístico que verifica:

1.º $I_{ef}(\vec{\theta},\hat{\vec{\theta}}) \geq 0 \qquad \forall\, \hat{\vec{\theta}}$

2.º $I_{ef}(\vec{\theta},\hat{\vec{\theta}}) = 0 \iff \vec{\theta}=\hat{\vec{\theta}}$

y por tanto, admitiremos que un método es mejor que otro para estimar el vector paramétrico θ de una S.C. si su índice de eficiencia es más cercano a cero, lo cual puede ser interpretado como que comete menores errores relativos para los parámetros en conjunto que el otro. El método sería perfecto si su índice de eficiencia fuese cero para cualquier S.C.

El hecho de haber elegido errores relativos para la elaboración del índice, deriva de la necesidad de compensar numéricamente la realidad de que trabajamos con variables que se mueven en muy distinta escala de valores: mientras que el coeficiente A toma su escala y unidades de acuerdo con la naturaleza del problema estudiado, B representa la pendiente de la función lineal tendencia pudiendo tomar cualquier valor real en unidades semejantes a las de A por unidad de tiempo, y las S_1, S_2,..., S_K representan coeficientes adimensionales "tantos por uno" y que por consiguiente, presumiblemente, en la gran mayoría de las situaciones serán valores cercanos a la unidad.

El proceso anteriormente descrito es repetido sucesivamente para distintas S.C. generadas como se ha expuesto, a fin de obtener un conjunto de valores de eficiencia suficiente como para realizar sobre ellos un análisis estadístico que pueda distinguir significativamente entre la eficiencia o bondad de los métodos de estimación empleados.

Como último paso de esta metodología, realizamos sobre este conjunto de eficiencias un análisis de varianza de un factor con efectos fijos, e intentamos reagrupar los métodos de estimación de forma homogénea según su eficiencia, utilizando los contrastes de comparaciones múltiples LSD y de Student–Newman–Keuls como ejemplos de más o menos agudizados detectores de diferencias entre grupos, de entre los contrastes estadísticos de este tipo. Todos estos análisis se han realizado a un nivel del 5% de significación.

Con la metodología antes expuesta, hemos realizado el estudio comparativo de los distintos métodos a partir de los datos generados como simulación de series cronológicas con 4 ciclos.

Para ello hemos simulado 50 series distintas de 40 datos cada una (10 periodos de duración) a partir de la generación aleatoria de sus parámetros característicos A, B, S_1, S_2, S_3, S_4 de manera que:

A proviene de una distribución uniforme en el intervalo (–100; 100),
B es la $tg\ (\theta)$ donde θ viene de una distribución uniforme en (0°; 180°),
S_1, S_2, S_3 provienen de distribuciones uniformes en (0.5; 1.5), y
S_4 vale $4-S_1-S_2-S_3$ con la condición de que $S_4 \in (0.5; 1.5)$.

Estos parámetros generados vienen expresados en la Tabla I, en la cual también, en su última columna, se representa el valor medio de la tendencia $A+B\bar{T}$, siendo $\bar{T}$ el punto medio temporal del intervalo de observación de la serie.

La variación estacional se ha simulado mediante la generación aleatoria de una muestra de 40 datos según una ley Normal de media 0 ó 1 cuando el modelo a simular fuera multiplicativo mixto o puro respectivamente, y desviación típica σ, parámetro éste al que hemos asignado 3 niveles de variabilidad y que son 0.01, 0.05 y 0.10 para el modelo multiplicativo puro, y el 1%, 5% y 10% del valor medio de la tendencia de la serie para el modelo multiplicativo mixto.

Así pues disponemos de 12 conjuntos de 50 series a estimar y que corresponden a 3 niveles de variabilidad de la variación accidental para cada una de las dos hipótesis a cerca de la tendencia (conocida o desconocida) y para cada uno de los 2 modelos multiplicativos estudiados (puro ó mixto).

Las eficiencias obtenidas para estos conjuntos, se encuentran reflejadas en las Tablas II a VII.

Allí observamos cómo existen casos extraños (outliers) que distorsionan evidentemente el contexto general en que se mueven los datos, como ocurre obviamente con la observación número 33 para todos los casos en que es preciso estimar la tendencia. Observamos que ello ocurre cuando la pendiente de la función tendencia es próxima a la vertical por lo que la propagación del error de su estimación es notable.

Para evitar tal tipo de observaciones anómalas hemos eliminado como casos extraños aquellos en que un índice de eficiencia superase a 5.

Los resultados principales de los análisis de varianza y contrastes de comparaciones múltiples realizados para cada uno de estos 12 conjuntos de datos representantes de situaciones distintas, están reflejados en la Tabla VIII, en la que hemos señalado la identificación de las observaciones eliminadas, intervalo de confianza para el valor medio, significancia a la que se aceptaría la hipótesis de no diferencia entre grupos, y las agrupaciones que determinarían al 5% de significación los contrastes de comparaciones múltiples LSD y S–N–K.

Como conclusión observamos que, estadísticamente hablando, no existe diferencia significativa al 5% de significación para ninguno de los casos en los que la tendencia secular lineal era desconocida, y al 95% de confianza, la eficiencia media de un método oscila entre los valores mínimo 0.0612 y máximo 0.3367, que corresponde a un error relativo medio para cada parámetro oscilando entre el 2.94% y el 13.74% del valor real.

Solamente en el caso en que la función tendencia es conocida, existe una ligera evidencia de desigualdad entre los métodos de estimación comparados, y esto cuando ocurre que la varianza de la variación aleatoria de la S.C. no es grande, puesto que al 5% de significación, cuando σ es 0.10 para el modelo multiplicativo puro o el 10% del valor medio de la tendencia secular de la S.C. para el modelo multiplicativo mixto, aceptaríamos la igualdad entre todos ellos.

Es solo en el caso en que la variación aleatoria no se dispersa excesivamente cuando el método de estimación de la media aritmética se demuestra más ineficiente que los de mínimos cuadrados y que el propio de razón a la tendencia.

En estos casos, al 95% de confianza, la eficiencia media oscila entre 0.0087 y 0.1073, lo que representa un error relativo medio para cada parámetro comprendido entre el 0.43% y el 5.36% del valor real.

De todo ello deducimos que solo en el caso de tener la certeza de que las variaciones accidentales alteran de una forma mínima la evolución de la S.C., debemos renunciar al uso del método de estimación de la media aritmética en favor de los demás métodos comparados y en pro de una mayor eficiencia en la estimación de los parámetros. En las demás situaciones, al no existir diferencia significativa entre ellos y ser operativamente más complejos los métodos de estimación de mínimos cuadrados, especialmente aquellos en que la tendencia secular es desconocida, podemos inclinarnos desde una óptica puramente práctica a efectos de computación, hacia una mayor utilización de los métodos tradicionales RT y MA en lugar de aquellos, sin por ello incurrir en pérdida de eficiencia apreciable en la estimación.

Tabla I

Parámetros básicos de las S.C. generadas

ITER	A0	B0	S0(1)	S0(2)	S0(3)	S0(4)	TEND.MEDIA
1	-91.967499	0.089338	1.055886	0.754795	1.067438	1.121881	-91.476143
2	21.920305	-12.313020	1.032326	0.725359	0.971493	1.270823	-45.801308
3	92.564873	-0.396478	1.130488	1.120924	0.783957	0.964631	90.384247
4	-50.025482	-0.197184	0.803778	1.004300	1.252802	0.939120	-51.109993
5	-42.491577	-0.981552	1.232053	0.970169	0.657729	1.140048	-47.890114
6	99.965431	1.283217	0.659915	0.713533	0.923789	1.702763	107.023125
7	-17.902086	1.058232	1.257721	1.347133	0.782885	0.612262	-12.081811
8	11.183241	-0.265366	0.715755	0.699227	1.108534	1.476485	9.723728
9	66.973045	0.359115	1.368792	0.599361	1.348631	0.683216	68.948181
10	4.528312	0.955535	1.080088	1.080130	1.149863	0.689919	9.783755
11	90.135590	-5.147178	0.709954	0.984631	1.228753	1.076662	61.826111
12	37.686893	3.582203	1.094438	0.514783	1.003404	1.387375	57.389011
13	-7.406061	-1.183483	0.961644	1.164188	0.860811	1.013357	-13.915218
14	-97.505653	0.838405	0.592441	1.076103	1.124649	1.206807	-92.894424
15	-81.304909	-4.104196	1.239615	1.123216	0.916109	0.721060	-103.877991
16	89.486076	-1.406711	0.840112	0.650344	1.488821	1.020723	81.749168
17	-63.855789	-0.626997	0.556557	1.256005	1.477612	0.709826	-67.304276
18	44.635651	-4.688064	1.162701	0.568883	1.321267	0.947149	18.851297
19	60.711632	-11.341116	0.917743	1.059447	1.023920	0.998891	-1.664505
20	-56.719360	-1.048209	0.897007	1.070373	1.081147	0.951473	-62.484509
21	-89.372620	-0.408659	1.159843	1.091159	0.728707	1.020291	-91.620247
22	-93.764015	-1.542782	1.090278	1.188150	0.882128	0.839444	-102.249313
23	-84.336700	-0.099751	0.454535	1.317692	1.110977	1.116796	-84.885330
24	-16.905369	-0.632771	1.065556	0.949527	0.686618	1.298299	-20.385609
25	5.902461	-13.124237	0.877472	0.899760	1.089883	1.132884	-66.280846
26	27.715916	-1.797784	0.919943	1.369465	0.902281	0.808311	17.828104
27	-94.803749	0.749952	0.874297	1.223378	1.220182	0.682143	-90.679016
28	-9.098696	-1.110303	0.800189	1.292215	0.551588	1.356008	-15.205362
29	-45.691071	-0.288248	0.767073	0.620073	1.505403	1.107450	-47.276436
30	-44.742313	0.996934	0.925835	0.549824	1.327158	1.197183	-39.259178
31	-11.250406	-1.647313	1.246467	1.025650	0.736804	0.991079	-20.310629
32	37.248150	-15.183879	0.542565	0.861516	1.329446	1.266473	-46.263187
33	-3.708254	22723.009766	0.884882	0.977007	1.103660	1.034452	124972.843750
34	81.430283	2.059877	1.118371	0.914426	0.573476	1.393727	92.759605
35	79.180351	-0.844352	1.359944	0.639523	0.974085	1.026449	74.536415
36	71.881882	-3.649913	0.954289	0.657749	1.733277	0.654685	51.807362
37	46.026310	0.406592	1.244192	1.262644	0.623693	0.869471	48.262566
38	-14.185654	4.634394	1.288615	0.532175	0.995541	1.183670	11.303514
39	-41.611462	1.026906	0.791357	0.969306	1.059238	1.180100	-35.963478
40	14.373402	-0.715918	1.091569	0.670014	1.530484	0.707933	10.435853
41	-42.956505	-0.796594	1.168064	0.569767	1.055724	1.206445	-47.337772
42	75.627342	2.653350	0.744847	1.364838	0.541410	1.348905	90.220772
43	92.942192	-1.168106	0.873734	1.355815	1.200038	0.570412	86.517609
44	-55.257141	-1.982244	0.677233	0.885623	1.661297	0.775847	-66.159485
45	87.854698	0.941699	1.033418	0.673551	1.193571	1.099460	93.034042
46	-73.651649	-1.117663	0.521588	1.116152	1.197265	1.164995	-79.798798
47	-50.297787	-1.917908	1.160809	0.573239	1.190867	1.075085	-60.846279
48	-5.915373	82.427727	0.811771	0.956023	0.997848	1.234359	447.437134
49	-32.423332	-0.999228	0.644051	0.706405	1.286741	1.362802	-37.919086
50	-77.656769	0.116615	0.907245	1.000059	1.116046	0.976650	-77.015388
MEDIA .	-3.136666	454.689270	0.946181	0.933913	1.073581	1.046326	2497.654297
DESV.TIP.	61.156403	3181.212402	0.232136	0.259040	0.279469	0.246814	17496.681641
MINIMO .	-97.505653	-15.183879	0.454535	0.514783	0.541410	0.570412	-103.877991
MAXIMO .	99.965431	22723.009766	1.368792	1.369465	1.733277	1.702763	124972.843750

Tabla II

Modelo multiplicativo puro. $\sigma = 0.01$

ITEM	I	II	I.A	II.A	RT	MA
1	0.006924	0.006549	0.006934	0.006547	0.006348	0.006247
2	0.013088	0.013674	0.008112	0.007182	0.006641	0.103606
3	0.007532	0.007216	0.007564	0.007268	0.007275	0.007278
4	0.006750	0.006830	0.006694	0.006766	0.006542	0.006796
5	0.008816	0.008216	0.008548	0.008313	0.008442	0.016670
6	0.007707	0.007918	0.007524	0.007639	0.006679	0.005715
7	0.006957	0.008086	0.003983	0.003984	0.003984	0.054690
8	0.002654	0.002547	0.003587	0.002158	0.002517	0.013051
9	0.008372	0.008469	0.008392	0.008448	0.008178	0.008313
10	0.005279	0.002431	0.004401	0.003741	0.003768	0.047410
11	0.008821	0.009130	0.008400	0.008245	0.008329	0.009448
12	0.007032	0.008071	0.007736	0.009141	0.007229	0.032129
13	0.004139	0.004083	0.004816	0.004213	0.003913	0.009459
14	0.008147	0.000863	0.007857	0.000955	0.002936	0.001155
15	0.002884	0.002309	0.004162	0.002834	0.002946	0.014285
16	0.004642	0.001995	0.005337	0.002085	0.002911	0.008831
17	0.007035	0.006789	0.007150	0.006879	0.005665	0.006831
18	0.010979	0.009130	0.010958	0.010478	0.007197	0.095640
19	0.009568	0.009002	0.004173	0.004173	0.004173	0.060533
20	0.003370	0.003337	0.003376	0.003384	0.003378	0.004605
21	0.009048	0.008856	0.009008	0.008828	0.008585	0.008103
22	0.005551	0.004770	0.004863	0.004058	0.004084	0.005669
23	0.003577	0.003685	0.003585	0.003703	0.003618	0.003520
24	0.010388	0.006475	0.009928	0.005938	0.006519	0.011675
25	0.012013	0.011988	0.006044	0.006061	0.006026	0.040309
26	0.004485	0.004200	0.003208	0.002951	0.002919	0.025507
27	0.003913	0.003534	0.003969	0.003515	0.003417	0.004896
28	0.008355	0.008701	0.009381	0.010523	0.009255	0.058317
29	0.004560	0.001195	0.004497	0.001398	0.002323	0.004840
30	0.005948	0.004059	0.005774	0.003955	0.003884	0.011978
31	0.007121	0.007025	0.006276	0.006244	0.006257	0.023411
32	0.011276	0.010856	0.005492	0.005121	0.004996	0.148956
33	0.003142	0.002668	0.005174	0.003104	0.003283	0.016707
34	0.005619	0.003370	0.005267	0.003242	0.003041	0.014049
35	0.004178	0.004205	0.004340	0.004449	0.004376	0.004643
36	0.005536	0.005373	0.004665	0.004671	0.004445	0.043654
37	0.009630	0.002759	0.009779	0.002945	0.004305	0.003157
38	0.008978	0.008448	0.005502	0.005555	0.005500	0.262096
39	0.009487	0.009827	0.009239	0.009584	0.009291	0.013258
40	0.006548	0.003887	0.006708	0.005479	0.005998	0.038882
41	0.001971	0.000834	0.002670	0.001269	0.001209	0.007471
42	0.008456	0.007025	0.009062	0.007473	0.008043	0.020041
43	0.008318	0.009973	0.008059	0.009721	0.008034	0.006751
44	0.007063	0.007341	0.007025	0.007297	0.007108	0.011618
45	0.008709	0.008683	0.008764	0.008745	0.008719	0.008667
46	0.002645	0.002526	0.002701	0.002640	0.002661	0.005767
47	0.007305	0.006762	0.006958	0.006201	0.005751	0.014579
48	0.005973	0.003871	0.005021	0.005137	0.004852	0.039823
49	0.003424	0.001880	0.003271	0.001615	0.001844	0.009646
50	0.004961	0.004345	0.004951	0.004324	0.004302	0.004338
MEDIA .	0.006777	0.005915	0.006218	0.005404	0.005274	0.027700
DESV.TIP.	0.002624	0.003069	0.002145	0.002560	0.002143	0.044039
MINIMO .	0.001971	0.000834	0.002670	0.000955	0.001209	0.001155
MAXIMO .	0.013088	0.013674	0.010958	0.010523	0.009291	0.262096

Tendencia conocida

Tabla II (*continuación*)

Modelo multiplicativo puro. $\sigma = 0.01$

ITER	III-IV	I	II	I.A	II.A	RT	MA
1	1.022160	1.070880	1.070880	1.070880	1.070880	1.070880	1.070880
2	0.013339	0.023272	0.018634	0.038461	0.035135	0.036592	0.104693
3	0.115339	0.113377	0.113377	0.113380	0.113380	0.113380	0.113379
4	0.198109	0.152051	0.152049	0.152049	0.152047	0.152048	0.152061
5	0.048396	0.047823	0.047880	0.047811	0.047868	0.047832	0.049805
6	0.127026	0.098363	0.098391	0.098365	0.098386	0.098367	0.098327
7	0.021600	0.021807	0.020649	0.022700	0.019494	0.018067	0.055967
8	0.057283	0.066444	0.066251	0.066473	0.066238	0.066277	0.067503
9	0.031344	0.019705	0.019728	0.019707	0.019726	0.019709	0.019756
10	0.009996	0.010755	0.009061	0.011805	0.009488	0.009268	0.047409
11	0.011670	0.012852	0.012651	0.012926	0.012782	0.011399	0.011809
12	0.020881	0.018976	0.019653	0.019105	0.019795	0.018734	0.036688
13	0.008523	0.009316	0.009229	0.009348	0.009244	0.009275	0.012737
14	0.093319	0.099260	0.099270	0.099258	0.099267	0.099258	0.099233
15	0.031429	0.029508	0.029092	0.029543	0.029147	0.029179	0.031917
16	0.065333	0.069025	0.068980	0.069034	0.068989	0.069005	0.069478
17	0.035065	0.025534	0.025555	0.025572	0.025592	0.025577	0.025836
18	0.009955	0.010195	0.009845	0.011488	0.010818	0.011113	0.095632
19	0.009289	0.009730	0.009692	0.024301	0.022973	0.023084	0.060241
20	0.054453	0.055635	0.055634	0.055637	0.055636	0.055637	0.055734
21	0.009793	0.016947	0.016933	0.016931	0.016916	0.016923	0.016685
22	0.020448	0.021136	0.021105	0.020982	0.020952	0.020954	0.021356
23	0.585622	0.402235	0.402236	0.402236	0.402236	0.402236	0.402234
24	0.010786	0.011396	0.011487	0.011078	0.011168	0.011112	0.014811
25	0.012116	0.074343	0.073518	0.079495	0.073651	0.074119	0.083104
26	0.004252	0.006478	0.004369	0.006280	0.003448	0.003244	0.025510
27	0.006378	0.012625	0.012615	0.012628	0.012622	0.012624	0.013078
28	0.015245	0.015460	0.014483	0.016329	0.014594	0.015319	0.059262
29	0.141092	0.123305	0.123296	0.123307	0.123297	0.123302	0.123368
30	0.016018	0.012966	0.012937	0.012865	0.012749	0.012621	0.016987
31	0.008550	0.009683	0.008383	0.009356	0.008048	0.007689	0.023638
32	0.011087	0.044747	0.040039	1.589940	1.645420	2.789220	0.152669
33	14.029900	134.593002	134.593002	134.593002	134.593002	134.593002	134.593002
34	0.030325	0.028868	0.028872	0.028865	0.028870	0.028865	0.032123
35	0.123026	0.115457	0.115452	0.115462	0.115457	0.115459	0.115466
36	0.017497	0.016546	0.016573	0.016248	0.016263	0.016245	0.045581
37	0.006400	0.007087	0.006801	0.007231	0.006937	0.007072	0.006423
38	0.009957	0.009151	0.008856	0.009437	0.007367	0.007151	0.262859
39	0.020520	0.019317	0.018909	0.019213	0.018787	0.018943	0.021197
40	0.015349	0.013966	0.014110	0.014435	0.014625	0.014485	0.041572
41	0.056828	0.058988	0.058983	0.058999	0.058994	0.058995	0.059474
42	0.009576	0.011323	0.011737	0.011618	0.012053	0.011742	0.021677
43	0.056507	0.051096	0.050997	0.051066	0.050965	0.051017	0.050927
44	0.009717	0.012086	0.012285	0.012068	0.012241	0.012101	0.015286
45	0.026021	0.029485	0.029487	0.029503	0.029506	0.029503	0.029491
46	0.039619	0.038185	0.038134	0.038195	0.038142	0.038147	0.038496
47	0.008444	0.007419	0.007321	0.007011	0.006934	0.006963	0.015130
48	0.076094	0.701225	0.701115	0.701593	0.701118	0.701111	0.702245
49	0.022452	0.016315	0.016076	0.016332	0.015947	0.015786	0.018441
50	0.044880	0.119234	0.119234	0.119233	0.119233	0.119233	0.119234
MEDIA .	0.348580	2.771291	2.770917	2.802976	2.803568	2.826397	2.788409
DESV.TIP.	1.961129	18.832529	18.832584	18.829182	18.829187	18.828468	18.830070
MINIMO .	0.004252	0.006478	0.004369	0.006280	0.003448	0.003244	0.006423
MAXIMO .	14.029900	134.593002	134.593002	134.593002	134.593002	134.593002	134.593002

Tendencia desconocida

Tabla III

Modelo multiplicativo puro. $\sigma = 0.05$

ITER	I	II	I.A	II.A	RT	MA
1	0.021499	0.021584	0.021453	0.021556	0.021502	0.021691
2	0.012086	0.010946	0.018385	0.018598	0.018486	0.088575
3	0.035669	0.030547	0.035188	0.029921	0.030082	0.030459
4	0.026930	0.026421	0.026852	0.026307	0.026499	0.026160
5	0.043124	0.037797	0.039734	0.034691	0.027897	0.024768
6	0.040329	0.041779	0.040301	0.039905	0.032290	0.030705
7	0.044150	0.041110	0.034881	0.037018	0.030475	0.070788
8	0.025208	0.025293	0.024400	0.024923	0.022253	0.030282
9	0.025262	0.024137	0.025530	0.024376	0.024958	0.023439
10	0.044497	0.039842	0.034993	0.030426	0.023950	0.022857
11	0.026394	0.023387	0.033795	0.028127	0.029642	0.028857
12	0.023866	0.015245	0.021367	0.013325	0.014636	0.033085
13	0.032933	0.029179	0.034596	0.025180	0.024115	0.028732
14	0.026130	0.024742	0.025233	0.023790	0.023814	0.023923
15	0.020456	0.021976	0.022355	0.024300	0.022476	0.010457
16	0.045534	0.044800	0.045461	0.043974	0.044775	0.043808
17	0.020844	0.020498	0.022176	0.021157	0.016358	0.020138
18	0.057544	0.049864	0.030738	0.027614	0.029074	0.063811
19	0.065481	0.065523	0.043023	0.041024	0.041132	0.243252
20	0.019155	0.016143	0.017438	0.016089	0.016388	0.017331
21	0.030855	0.026197	0.030270	0.025370	0.026657	0.027619
22	0.048203	0.044391	0.048057	0.044568	0.043256	0.044289
23	0.017346	0.020221	0.017400	0.020247	0.016511	0.016227
24	0.023550	0.023717	0.020978	0.020294	0.019174	0.029640
25	0.043260	0.038670	0.028679	0.028526	0.028543	0.051634
26	0.033689	0.026630	0.024815	0.021433	0.021220	0.030386
27	0.012620	0.012225	0.012236	0.012158	0.012051	0.012706
28	0.043307	0.029798	0.037155	0.028652	0.029553	0.059145
29	0.048676	0.047661	0.048523	0.047396	0.046141	0.046729
30	0.024817	0.026802	0.029356	0.029952	0.024633	0.031825
31	0.062708	0.062936	0.055440	0.057025	0.051771	0.040778
32	0.024845	0.020199	0.031331	0.024705	0.026644	0.139269
33	0.065194	0.064529	0.055024	0.054076	0.054578	0.073673
34	0.030580	0.030109	0.029634	0.028580	0.029124	0.024645
35	0.038751	0.012240	0.038749	0.012702	0.015002	0.016981
36	0.035665	0.026171	0.024383	0.023880	0.024107	0.061731
37	0.016238	0.012644	0.016422	0.012536	0.013833	0.016779
38	0.030308	0.019976	0.037113	0.037429	0.037259	0.260798
39	0.044262	0.037615	0.044354	0.040030	0.039689	0.038169
40	0.050092	0.048804	0.044693	0.043799	0.044180	0.062625
41	0.023655	0.021544	0.025839	0.022880	0.023687	0.025614
42	0.012946	0.001684	0.013108	0.004612	0.007355	0.017184
43	0.019548	0.018261	0.019702	0.018056	0.018770	0.016395
44	0.013600	0.012804	0.011953	0.011960	0.011947	0.017407
45	0.026929	0.028430	0.027139	0.029254	0.027718	0.024868
46	0.030248	0.021060	0.029899	0.020409	0.023528	0.027372
47	0.027715	0.014437	0.023838	0.013982	0.018062	0.009785
48	0.026283	0.019322	0.025525	0.011082	0.012223	0.035409
49	0.018311	0.016837	0.017821	0.014394	0.014965	0.018869
50	0.037018	0.035994	0.036995	0.035972	0.036095	0.036165
MEDIA .	0.032366	0.028654	0.030087	0.026965	0.026381	0.043957
DESV.TIP.	0.013607	0.014069	0.010685	0.011446	0.010662	0.048221
MINIMO .	0.012086	0.001684	0.011953	0.004612	0.007355	0.009785
MAXIMO .	0.065481	0.065523	0.055440	0.057025	0.054578	0.260798

Tendencia conocida

Tabla III (*continuación*)

Modelo multiplicativo puro. $\sigma = 0.05$

ITER	III-IV	I	II	I.A	II.A	RT	MA
1	2.005110	2.304470	2.304470	2.304470	2.304470	2.304470	2.304480
2	0.016073	0.018938	0.015137	0.041288	0.037190	0.038086	0.089362
3	0.094289	0.117962	0.117965	0.117827	0.117829	0.117828	0.117911
4	0.338788	0.291657	0.291659	0.291651	0.291653	0.291652	0.291630
5	0.283987	0.252020	0.251994	0.251798	0.251777	0.251787	0.251518
6	0.356741	0.131738	0.131966	0.131602	0.131795	0.131691	0.131353
7	0.050415	0.052409	0.053068	0.048315	0.050233	0.048252	0.077846
8	0.117777	0.111959	0.111570	0.111997	0.111618	0.111747	0.113514
9	0.031884	0.054396	0.054308	0.054506	0.054416	0.054465	0.053813
10	0.055622	0.052021	0.050562	0.045215	0.044219	0.044670	0.042549
11	0.024210	0.025734	0.025157	0.031100	0.031495	0.030649	0.029746
12	0.033700	0.034990	0.035418	0.034527	0.035071	0.034530	0.045864
13	0.071514	0.068572	0.068564	0.066956	0.066953	0.066955	0.068409
14	0.025183	0.032906	0.032912	0.032213	0.032221	0.032200	0.032279
15	0.020992	0.024322	0.022583	0.026213	0.024371	0.025146	0.015442
16	0.374595	0.357397	0.357421	0.357309	0.357331	0.357300	0.357115
17	0.391207	0.442779	0.442776	0.442786	0.442783	0.442784	0.442863
18	0.055228	0.055511	0.055685	0.052353	0.055687	0.051262	0.064827
19	0.065273	0.065219	0.065291	0.112060	0.093534	0.091645	0.243301
20	0.322534	0.341940	0.341939	0.341935	0.341934	0.341934	0.341963
21	0.469434	0.401600	0.401604	0.401525	0.401529	0.401527	0.401620
22	0.046196	0.054942	0.054976	0.054930	0.054976	0.054923	0.055832
23	0.219093	0.558522	0.558525	0.558524	0.558527	0.558525	0.558512
24	0.097402	0.103826	0.103785	0.103067	0.103037	0.103051	0.105241
25	0.100783	0.177756	0.177344	0.181249	0.177152	0.177617	0.180808
26	0.030863	0.037424	0.036558	0.033217	0.032604	0.032592	0.038192
27	0.227005	0.352997	0.352998	0.352991	0.352990	0.352990	0.353046
28	0.121741	0.106801	0.106851	0.108026	0.108287	0.108149	0.121690
29	0.740813	0.621436	0.621434	0.621426	0.621424	0.621426	0.621443
30	0.113065	0.143649	0.143438	0.144272	0.144084	0.144186	0.145695
31	0.071637	0.070494	0.069408	0.064951	0.063808	0.064286	0.056603
32	0.022316	0.040907	0.033723	2.986570	3.112620	54.677601	0.141208
33	208.098007	336.312988	336.312988	336.312988	336.312988	336.312988	336.312988
34	0.118117	0.105874	0.105932	0.105541	0.105595	0.105561	0.104471
35	0.171739	0.115251	0.115270	0.115175	0.115191	0.115183	0.115430
36	0.089655	0.095977	0.095912	0.094707	0.094433	0.094555	0.112803
37	0.382325	0.313014	0.313039	0.313006	0.313028	0.313015	0.313229
38	0.035586	0.033276	0.033798	0.087192	0.087434	0.086908	0.264559
39	0.156894	0.157857	0.157818	0.158372	0.158327	0.158336	0.158067
40	0.050002	0.049342	0.049459	0.044079	0.044340	0.044159	0.062577
41	0.221592	0.114982	0.114974	0.115389	0.115361	0.115377	0.115748
42	0.090078	0.069007	0.069098	0.069257	0.069381	0.069297	0.071320
43	0.259262	0.205404	0.205372	0.205386	0.205360	0.205375	0.205256
44	0.015098	0.043358	0.043218	0.042925	0.042914	0.042916	0.044601
45	0.700723	0.689974	0.689987	0.689997	0.690010	0.690003	0.689809
46	0.200612	0.162425	0.162282	0.162257	0.162135	0.162205	0.162879
47	0.172740	0.165119	0.165163	0.165018	0.165065	0.165036	0.164223
48	1.188390	1.640290	1.640300	1.640630	1.640190	1.640200	1.640530
49	0.017714	0.042309	0.042130	0.041527	0.041597	0.041426	0.043037
50	0.037980	0.037269	0.037266	0.037246	0.037243	0.037244	0.037313
MEDIA .	4.380037	6.957221	6.956901	7.018151	7.020163	8.051313	6.970291
DESV.TIP.	29.104496	47.052471	47.052517	47.045322	47.045185	47.511127	47.050571
MINIMO .	0.015098	0.018938	0.015137	0.026213	0.024371	0.025146	0.015442
MAXIMO .	208.098007	336.312988	336.312988	336.312988	336.312988	336.312988	336.312988

Tendencia desconocida

Tabla IV

Modelo multiplicativo puro. $\sigma = 0.10$

ITER	I	II	I.A	II.A	RT	MA
1	0.066043	0.043343	0.065934	0.043187	0.044240	0.044385
2	0.076807	0.074611	0.082081	0.056679	0.061139	0.102521
3	0.040457	0.039973	0.039311	0.038786	0.039079	0.039065
4	0.122351	0.108960	0.123350	0.110046	0.106075	0.105318
5	0.089029	0.087796	0.084151	0.083388	0.083867	0.088856
6	0.075950	0.084173	0.076596	0.083282	0.054964	0.061075
7	0.093229	0.101371	0.073610	0.085252	0.070462	0.062087
8	0.032513	0.029209	0.038165	0.034576	0.032934	0.034019
9	0.039432	0.028395	0.039531	0.028501	0.029453	0.028290
10	0.094714	0.091818	0.047495	0.043406	0.045202	0.108607
11	0.097868	0.093263	0.090147	0.089703	0.086816	0.078831
12	0.115527	0.127250	0.081634	0.089691	0.084681	0.079757
13	0.091199	0.091732	0.082181	0.083247	0.082481	0.080544
14	0.072083	0.077995	0.073020	0.079038	0.071678	0.069768
15	0.085267	0.077188	0.086309	0.082554	0.079056	0.075658
16	0.095726	0.086515	0.096838	0.086783	0.092363	0.085819
17	0.093175	0.081965	0.094324	0.082031	0.079392	0.080085
18	0.079322	0.088705	0.055712	0.055694	0.055698	0.132462
19	0.119004	0.040604	0.054894	0.019461	0.021555	0.258149
20	0.096829	0.087521	0.098881	0.087049	0.082461	0.084086
21	0.077482	0.074664	0.077258	0.074300	0.075977	0.077225
22	0.057112	0.057411	0.062303	0.062497	0.062285	0.061646
23	0.070044	0.031959	0.069930	0.031773	0.038497	0.038371
24	0.058974	0.061738	0.048039	0.050466	0.046993	0.046331
25	0.069857	0.067465	0.048187	0.034900	0.034213	0.063410
26	0.052479	0.044179	0.055576	0.050596	0.052767	0.025042
27	0.064973	0.063518	0.063575	0.061682	0.062752	0.061467
28	0.061363	0.061556	0.086885	0.086791	0.086811	0.078763
29	0.048330	0.048852	0.047769	0.048389	0.048060	0.046031
30	0.034504	0.042156	0.042766	0.052570	0.041578	0.049552
31	0.072535	0.073392	0.046592	0.046628	0.046611	0.045593
32	0.068450	0.049899	0.014517	0.013869	0.014233	0.139999
33	0.090381	0.071898	0.085686	0.076156	0.076151	0.076027
34	0.076187	0.051697	0.069005	0.043171	0.051522	0.049191
35	0.049850	0.049644	0.047766	0.046817	0.045254	0.045212
36	0.055977	0.059956	0.071288	0.075214	0.067123	0.043605
37	0.050545	0.046397	0.051181	0.047980	0.045484	0.046112
38	0.048426	0.047633	0.059400	0.058956	0.059084	0.292955
39	0.016214	0.013711	0.013642	0.012606	0.012821	0.014712
40	0.037871	0.022445	0.039462	0.025584	0.028592	0.032519
41	0.028278	0.028100	0.024098	0.024171	0.023993	0.025597
42	0.076874	0.090971	0.085573	0.101260	0.089952	0.077088
43	0.043221	0.043883	0.042580	0.042795	0.042644	0.048966
44	0.030860	0.032288	0.027103	0.027653	0.025865	0.031048
45	0.048757	0.038512	0.046981	0.038587	0.042421	0.045705
46	0.064416	0.068230	0.066819	0.071388	0.065947	0.063292
47	0.035849	0.026864	0.042706	0.031278	0.036716	0.045082
48	0.057932	0.050819	0.032183	0.022991	0.023736	0.072089
49	0.080179	0.098252	0.075929	0.093060	0.072401	0.084597
50	0.070254	0.070282	0.069501	0.069530	0.069599	0.069950
MEDIA .	0.067494	0.062615	0.061969	0.057721	0.055874	0.071931
DESV.TIP.	0.024266	0.025268	0.023000	0.025003	0.022596	0.049251
MINIMO .	0.016214	0.013711	0.013642	0.012606	0.012821	0.014712
MAXIMO .	0.122351	0.127250	0.123350	0.110046	0.106075	0.292955

Tendencia conocida

Tabla IV (*continuación*)

Modelo multiplicativo puro. $\sigma = 0.10$

ITER	III-IV	I	II	I.A	II.A	RT	MA
1	0.531062	0.577680	0.577680	0.577664	0.577664	0.577664	0.577680
2	0.088760	0.078124	0.076845	0.077617	0.073241	0.074594	0.105347
3	0.407272	0.272806	0.272800	0.272590	0.272583	0.272588	0.272587
4	0.112950	0.113568	0.113584	0.114812	0.114828	0.114825	0.114055
5	0.202276	0.209698	0.209717	0.208074	0.208099	0.208078	0.209762
6	0.091224	0.121658	0.120901	0.121473	0.120729	0.121129	0.123669
7	0.112639	0.125357	0.119650	0.111190	0.104410	0.107901	0.099258
8	0.398342	0.297869	0.297805	0.298024	0.297996	0.297998	0.298204
9	0.711304	0.496502	0.496493	0.496528	0.496518	0.496523	0.496437
10	1.097730	0.099680	0.100707	0.056671	0.057814	0.056098	0.114186
11	0.118795	0.119476	0.119600	0.117369	0.117912	0.116906	0.110017
12	0.155279	0.127612	0.130226	0.097081	0.099287	0.098059	0.094081
13	0.100780	0.100148	0.100219	0.091354	0.091643	0.091557	0.089860
14	0.353628	0.339398	0.339457	0.339497	0.339556	0.339513	0.339258
15	0.081328	0.089983	0.089495	0.092880	0.092139	0.092348	0.089565
16	0.182998	0.153876	0.154496	0.154407	0.155039	0.154621	0.150266
17	0.121297	0.285789	0.285790	0.285958	0.285955	0.285959	0.286239
18	0.086531	0.087157	0.085663	0.129629	0.102639	0.080863	0.135413
19	0.091099	0.093121	0.093104	0.103091	0.092826	0.091897	0.324906
20	0.462784	0.474390	0.474386	0.474365	0.474361	0.474365	0.474497
21	0.425560	0.441334	0.441353	0.441261	0.441281	0.441268	0.441581
22	0.346397	0.349704	0.349729	0.350955	0.350982	0.350955	0.350832
23	1.984370	1.622090	1.622090	1.622100	1.622100	1.622100	1.622100
24	0.121244	0.094319	0.094390	0.088221	0.088354	0.088295	0.087837
25	0.116858	0.217034	0.216678	0.217730	0.211590	0.212310	0.216240
26	0.054631	0.054610	0.052410	0.059819	0.056913	0.058263	0.034711
27	0.694446	0.715792	0.715780	0.715562	0.715552	0.715559	0.715394
28	0.079637	0.079816	0.079937	0.099503	0.099748	0.099665	0.092712
29	0.471623	0.118338	0.118529	0.118100	0.118295	0.118191	0.117292
30	0.373271	0.311989	0.311763	0.313145	0.312809	0.312994	0.314525
31	0.081591	0.083058	0.081793	0.061619	0.060890	0.061199	0.060056
32	0.077483	0.064908	0.076067	0.064361	0.043270	0.050719	0.141631
33	159.199005	114.180000	114.180000	114.180000	114.180000	114.180000	114.180000
34	0.282858	0.202799	0.202926	0.200619	0.200736	0.200667	0.199892
35	0.389091	0.495770	0.495768	0.495637	0.495635	0.495636	0.495633
36	0.053924	0.055237	0.055321	0.071221	0.071193	0.071213	0.049365
37	0.593171	0.238830	0.238831	0.238950	0.238956	0.238947	0.239028
38	0.048132	0.048578	0.047447	0.060993	0.060692	0.060805	0.293004
39	0.089618	0.109406	0.109340	0.109265	0.109215	0.109225	0.109393
40	0.146299	0.115775	0.115794	0.118966	0.118829	0.118900	0.118647
41	0.411463	0.395450	0.395451	0.395320	0.395321	0.395321	0.395376
42	0.212985	0.149840	0.150479	0.155963	0.156618	0.156297	0.148287
43	0.417421	0.379202	0.379214	0.379150	0.379161	0.379153	0.379572
44	0.112528	0.101231	0.101034	0.100020	0.099841	0.099926	0.101198
45	0.942908	0.883744	0.883743	0.883740	0.883738	0.883739	0.883760
46	0.064480	0.100140	0.100442	0.101911	0.102246	0.102049	0.100481
47	0.047375	0.035363	0.035042	0.041026	0.040454	0.040815	0.048608
48	2.289240	1.357830	1.357690	1.357370	1.357360	1.357360	1.358820
49	0.262264	0.269355	0.268209	0.268593	0.267523	0.268128	0.272313
50	0.440980	0.885058	0.885058	0.885051	0.885051	0.885051	0.885055
MEDIA .	3.526778	2.568410	2.568419	2.568329	2.566792	2.566565	2.579172
DESV.TIP.	22.243122	15.947689	15.947687	15.947701	15.947939	15.947974	15.946078
MINIMO .	0.047375	0.035363	0.035042	0.041026	0.040454	0.040815	0.034711
MAXIMO .	159.199005	114.180000	114.180000	114.180000	114.180000	114.180000	114.180000

Tendencia desconocida

Tabla V

Modelo multiplicativo mixto. $\sigma = 1$ %

ITER	I	II	I.A	II.A	RT	MA
1	0.006221	0.005857	0.006231	0.005852	0.005705	0.005802
2	0.005457	0.005708	0.026532	0.017941	0.015762	0.091087
3	0.007466	0.007095	0.007486	0.007137	0.007184	0.007077
4	0.007597	0.007735	0.007540	0.007669	0.007524	0.007416
5	0.012270	0.010769	0.011697	0.010597	0.011130	0.004017
6	0.007020	0.006028	0.007144	0.006213	0.006259	0.008101
7	0.005037	0.005344	0.007206	0.004578	0.005728	0.047429
8	0.003072	0.002025	0.005884	0.002806	0.003767	0.014060
9	0.011827	0.011944	0.011797	0.011880	0.011691	0.011644
10	0.004629	0.002726	0.005128	0.005026	0.005040	0.047676
11	0.010576	0.010334	0.011974	0.010561	0.011192	0.008262
12	0.010048	0.011161	0.010399	0.012333	0.010419	0.029374
13	0.003590	0.003415	0.005410	0.004264	0.003970	0.015313
14	0.011255	0.004275	0.010835	0.004067	0.006600	0.008962
15	0.003592	0.002320	0.005567	0.003792	0.003900	0.015706
16	0.006517	0.002916	0.007369	0.003068	0.004386	0.010314
17	0.006033	0.005259	0.006107	0.005300	0.004377	0.006614
18	0.006255	0.003381	0.057064	0.050763	0.054165	0.095354
19	0.000408	0.000409	0.005147	0.004775	0.004756	0.081392
20	0.003268	0.003270	0.003339	0.003312	0.003320	0.002435
21	0.008585	0.008561	0.008583	0.008577	0.008289	0.009068
22	0.005839	0.005054	0.005062	0.004242	0.004299	0.005751
23	0.003374	0.003308	0.003405	0.003340	0.003380	0.003607
24	0.011295	0.006295	0.011201	0.005997	0.007129	0.018876
25	0.006822	0.006724	0.004204	0.003810	0.003769	0.029281
26	0.003610	0.003278	0.004395	0.004013	0.004087	0.024680
27	0.003541	0.003010	0.003638	0.002978	0.002960	0.005053
28	0.010780	0.011431	0.016584	0.017807	0.016885	0.042819
29	0.006488	0.002762	0.006403	0.002881	0.004161	0.001775
30	0.007425	0.004253	0.006741	0.003412	0.004445	0.016337
31	0.006257	0.006178	0.005409	0.005342	0.005368	0.021905
32	0.003805	0.003589	0.020061	0.021831	0.020067	0.151145
33	0.002325	0.000982	0.018896	0.013172	0.013795	0.014689
34	0.006074	0.002975	0.005732	0.002905	0.003244	0.012963
35	0.003878	0.003836	0.004020	0.004062	0.004039	0.004507
36	0.006117	0.006175	0.005494	0.005160	0.004916	0.043156
37	0.012931	0.005037	0.013239	0.005381	0.008035	0.004717
38	0.003226	0.003099	0.025407	0.017976	0.021737	0.261778
39	0.010548	0.010769	0.010582	0.010747	0.010643	0.007769
40	0.008772	0.005802	0.009538	0.007775	0.008552	0.041230
41	0.002857	0.000965	0.003658	0.001291	0.001989	0.006067
42	0.011390	0.008490	0.012390	0.008970	0.010233	0.019090
43	0.007826	0.009131	0.008100	0.009297	0.008445	0.004716
44	0.007647	0.007664	0.007814	0.007808	0.007811	0.017768
45	0.008101	0.008081	0.008159	0.008149	0.008131	0.008149
46	0.002526	0.002308	0.002549	0.002435	0.002485	0.003810
47	0.006311	0.005325	0.006409	0.004903	0.004861	0.014675
48	0.003180	0.002371	0.019049	0.019140	0.019094	0.036483
49	0.004582	0.002575	0.004322	0.002290	0.002752	0.013756
50	0.005082	0.004484	0.005072	0.004460	0.004450	0.004424
MEDIA .	0.006467	0.005330	0.009719	0.008042	0.008338	0.027362
DESV.TIP.	0.003013	0.002941	0.008651	0.007785	0.008044	0.043787
MINIMO .	0.000408	0.000409	0.002549	0.001291	0.001989	0.001775
MAXIMO .	0.012931	0.011944	0.057064	0.050763	0.054165	0.261778

Tendencia conocida

Tabla V (*continuación*)

Modelo multiplicativo mixto. $\sigma = 1$ %

ITER	III-IV	I	II	I.A	II.A	RT	MA
1	1.053100	1.132700	1.132700	1.132700	1.132700	1.132700	1.132700
2	0.006466	0.015526	0.013599	0.036975	0.017459	0.019755	0.091814
3	0.111555	0.111907	0.111907	0.111910	0.111909	0.111909	0.111902
4	0.144801	0.106214	0.106216	0.106211	0.106213	0.106212	0.106205
5	0.047045	0.048741	0.048648	0.048662	0.048569	0.048618	0.047485
6	0.080281	0.065221	0.065173	0.065250	0.065196	0.065208	0.065413
7	0.015469	0.022325	0.017028	0.023663	0.016670	0.017434	0.051466
8	0.061684	0.080148	0.079961	0.080251	0.080002	0.080066	0.081188
9	0.021116	0.084858	0.084864	0.084852	0.084857	0.084853	0.084839
10	0.010218	0.010540	0.008936	0.012087	0.009770	0.009558	0.047637
11	0.012769	0.014345	0.014456	0.015260	0.015756	0.014266	0.011469
12	0.023664	0.022394	0.023565	0.022541	0.023680	0.022439	0.035649
13	0.011147	0.010763	0.010783	0.011049	0.011060	0.011038	0.018324
14	0.089447	0.104231	0.104184	0.104213	0.104166	0.104190	0.104374
15	0.030181	0.030702	0.030527	0.030868	0.030661	0.030588	0.034603
16	0.063217	0.072512	0.072455	0.072536	0.072475	0.072500	0.073060
17	0.018874	0.013009	0.012983	0.013045	0.013021	0.013035	0.013972
18	0.002873	0.003568	0.003334	0.042015	0.036788	0.039660	0.095348
19	0.000394	0.001259	0.001236	0.019623	0.016983	0.017124	0.081404
20	0.059619	0.061246	0.061246	0.061248	0.061248	0.061248	0.061207
21	0.015744	0.037687	0.037694	0.037689	0.037697	0.037692	0.037879
22	0.020164	0.021347	0.021334	0.021170	0.021157	0.021152	0.021460
23	0.365114	0.095511	0.095509	0.095512	0.095510	0.095511	0.095519
24	0.009080	0.008948	0.008680	0.008779	0.008483	0.008612	0.019456
25	0.015174	0.050150	0.049630	0.054288	0.049318	0.049646	0.057062
26	0.003392	0.005947	0.003464	0.007221	0.004194	0.004379	0.024693
27	0.011794	0.033317	0.033317	0.033319	0.033317	0.033317	0.033596
28	0.015524	0.011694	0.012732	0.017069	0.018829	0.017313	0.043170
29	0.110755	0.110760	0.110778	0.110761	0.110779	0.110767	0.110694
30	0.015242	0.010282	0.009319	0.009745	0.008896	0.009211	0.018175
31	0.007189	0.010514	0.009167	0.010505	0.008347	0.008533	0.023021
32	0.004287	0.042667	0.035372	20.813999	21.792801	2.404360	0.154348
33	133.000000	252.835999	252.835999	252.835999	252.835999	252.835999	252.835999
34	0.024310	0.024353	0.024379	0.024344	0.024369	0.024352	0.027544
35	0.107073	0.103307	0.103303	0.103313	0.103308	0.103310	0.103325
36	0.013350	0.015210	0.015271	0.014799	0.014802	0.014787	0.044640
37	0.011932	0.024168	0.023996	0.024284	0.024106	0.024199	0.023308
38	0.003288	0.003531	0.003291	0.026467	0.014360	0.019760	0.261952
39	0.018176	0.017279	0.017504	0.017297	0.017541	0.017314	0.015626
40	0.013182	0.012048	0.012382	0.013003	0.013392	0.013140	0.042805
41	0.058818	0.064401	0.064405	0.064413	0.064419	0.064414	0.064655
42	0.012882	0.018446	0.018846	0.018757	0.019210	0.018917	0.024681
43	0.045472	0.050779	0.050670	0.050827	0.050711	0.050773	0.050371
44	0.013157	0.017716	0.017556	0.017771	0.017634	0.017617	0.023620
45	0.025261	0.031003	0.031003	0.031019	0.031021	0.031019	0.031026
46	0.035021	0.035317	0.035322	0.035325	0.035328	0.035294	0.035394
47	0.005541	0.006535	0.006516	0.006409	0.006323	0.006346	0.015261
48	0.050211	0.693036	0.692940	0.693511	0.693147	0.693086	0.693897
49	0.015514	0.009653	0.007871	0.009457	0.007851	0.007991	0.015664
50	1.184120	0.194499	0.194499	0.194499	0.194499	0.194499	0.194498
MEDIA .	2.741893	5.132166	5.131732	5.549931	5.568331	5.180714	5.149869
DESV.TIP.	18.609591	35.386723	35.386764	35.446045	35.454922	35.381279	35.384186
MINIMO .	0.000394	0.001259	0.001236	0.006409	0.004194	0.004379	0.011469
MAXIMO .	133.000000	252.835999	252.835999	252.835999	252.835999	252.835999	252.835999

Tendencia desconocida

Tabla VI

Modelo multiplicativo mixto. σ = 5 %

ITER	I	II	I.A	II.A	RT	MA
1	0.024403	0.023658	0.024300	0.023588	0.023953	0.023788
2	0.009268	0.006420	0.436368	0.275088	0.289486	0.109975
3	0.037122	0.030934	0.036754	0.030417	0.031085	0.031558
4	0.026010	0.024400	0.025885	0.024242	0.024844	0.025417
5	0.035124	0.029264	0.032872	0.027090	0.021386	0.027805
6	0.046107	0.043973	0.047872	0.044147	0.041880	0.042007
7	0.031777	0.028317	0.026324	0.030589	0.025781	0.043009
8	0.018226	0.016847	0.018512	0.017753	0.016740	0.022887
9	0.033297	0.028905	0.034094	0.029639	0.031700	0.029868
10	0.035519	0.033546	0.033627	0.025834	0.018785	0.024873
11	0.031956	0.027010	0.050398	0.039577	0.043320	0.031797
12	0.027651	0.013831	0.030251	0.016281	0.022079	0.023800
13	0.030684	0.024380	0.039942	0.026581	0.026530	0.030674
14	0.024242	0.022035	0.023532	0.021188	0.021396	0.022423
15	0.021707	0.023067	0.025182	0.026640	0.025602	0.038930
16	0.053624	0.051484	0.054067	0.050478	0.052420	0.049447
17	0.024254	0.020139	0.026183	0.020876	0.020792	0.019074
18	0.040089	0.031668	0.147767	0.099903	0.120173	0.069581
19	0.001744	0.001614	0.009978	0.007307	0.007219	0.090405
20	0.019425	0.016867	0.017900	0.016932	0.017096	0.016724
21	0.032674	0.025816	0.032180	0.025050	0.026731	0.026456
22	0.044299	0.040635	0.044269	0.040963	0.040487	0.039949
23	0.020200	0.023908	0.020188	0.023893	0.020578	0.020962
24	0.018205	0.017847	0.017049	0.014669	0.014078	0.017659
25	0.027235	0.024554	0.066233	0.065358	0.065177	0.048487
26	0.027787	0.021889	0.033524	0.031224	0.031245	0.030180
27	0.011240	0.010864	0.010947	0.010933	0.010902	0.011127
28	0.048222	0.032969	0.048618	0.039579	0.042464	0.073060
29	0.046125	0.045052	0.046062	0.044843	0.044252	0.044597
30	0.030503	0.033478	0.035165	0.036874	0.031564	0.025178
31	0.054384	0.056609	0.054045	0.056932	0.051261	0.074884
32	0.017325	0.008376	0.112130	0.036461	0.045012	0.182303
33	0.053439	0.052418	0.131629	0.111233	0.118264	0.078326
34	0.042807	0.040013	0.040606	0.037267	0.038896	0.032244
35	0.046629	0.014125	0.046043	0.013395	0.021283	0.024380
36	0.036849	0.026799	0.023051	0.022679	0.022847	0.059787
37	0.019999	0.013686	0.019866	0.013505	0.015657	0.018997
38	0.011693	0.011249	0.235134	0.239688	0.235115	0.269383
39	0.044598	0.039512	0.046121	0.043256	0.042172	0.040084
40	0.049197	0.045981	0.046420	0.044723	0.045502	0.066329
41	0.024284	0.019675	0.030120	0.023579	0.025952	0.019958
42	0.019418	0.006727	0.020649	0.010001	0.014328	0.012459
43	0.025113	0.021810	0.025384	0.021785	0.023519	0.017407
44	0.016416	0.015795	0.013752	0.013743	0.013739	0.021144
45	0.035694	0.035639	0.035331	0.036226	0.035712	0.032995
46	0.043216	0.027183	0.041765	0.025337	0.032448	0.029632
47	0.039621	0.024232	0.038921	0.027756	0.033370	0.045624
48	0.025284	0.015138	0.042321	0.038691	0.037837	0.033060
49	0.017141	0.012446	0.021094	0.012826	0.015787	0.022997
50	0.036032	0.034598	0.036006	0.034573	0.034983	0.034853
MEDIA .	0.030758	0.025948	0.051129	0.041024	0.042269	0.044571
DESV.TIP.	0.012466	0.012422	0.066852	0.048353	0.049967	0.043298
MINIMO .	0.001744	0.001614	0.009978	0.007307	0.007219	0.011127
MAXIMO .	0.054384	0.056609	0.436368	0.275088	0.289486	0.269383

Tendencia conocida

Tabla VI (*continuación*)

Modelo multiplicativo mixto. σ = 5 %

ITER	III-IV	I	II	I.A	II.A	RT	MA
1	2.249040	2.703890	2.703890	2.703890	2.703890	2.703890	2.703890
2	0.023381	0.037068	0.035271	0.349614	0.202866	0.208554	0.115405
3	0.112425	0.134591	0.134596	0.134494	0.134498	0.134496	0.134590
4	0.292867	0.237062	0.237057	0.237042	0.237037	0.237040	0.237114
5	0.208966	0.181471	0.181507	0.181261	0.181296	0.181275	0.182354
6	0.099895	0.134134	0.134271	0.134485	0.134563	0.134514	0.134533
7	0.038651	0.049850	0.047626	0.052042	0.045345	0.047698	0.061247
8	0.091733	0.091784	0.091507	0.092012	0.091746	0.091806	0.093093
9	0.055332	0.153596	0.153554	0.153726	0.153683	0.153707	0.153389
10	0.037365	0.045616	0.044092	0.038747	0.037700	0.038141	0.041864
11	0.032362	0.038881	0.039210	0.051248	0.052469	0.051368	0.041051
12	0.025488	0.025102	0.027026	0.027571	0.029824	0.028174	0.029581
13	0.078019	0.077428	0.077427	0.078746	0.078698	0.078690	0.079882
14	0.023177	0.023294	0.023177	0.022544	0.022412	0.022460	0.023434
15	0.022258	0.024877	0.026068	0.028043	0.029485	0.028430	0.041076
16	0.339306	0.350555	0.350633	0.350499	0.350578	0.350513	0.349903
17	0.399529	0.514042	0.514042	0.514092	0.514089	0.514091	0.514022
18	0.036405	0.036394	0.036771	0.143316	0.100408	0.118869	0.069693
19	0.001748	0.001725	0.001724	0.013816	0.013004	0.013074	0.090279
20	0.343024	0.363185	0.363186	0.363189	0.363190	0.363190	0.363164
21	0.377883	0.341088	0.341086	0.341052	0.341049	0.341050	0.341035
22	0.045194	0.056696	0.056655	0.056796	0.056748	0.056759	0.056414
23	0.529660	0.928597	0.928597	0.928597	0.928597	0.928597	0.928598
24	0.120796	0.125531	0.125541	0.124996	0.125005	0.125000	0.125585
25	0.157838	0.105393	0.105214	0.134864	0.131877	0.131825	0.112886
26	0.025719	0.030970	0.030178	0.038216	0.037554	0.037613	0.035842
27	0.335045	0.495984	0.495984	0.495983	0.495983	0.495983	0.495976
28	0.093965	0.084011	0.083314	0.087409	0.086422	0.086886	0.103262
29	0.575188	0.512936	0.512942	0.512906	0.512912	0.512909	0.512950
30	0.147495	0.184062	0.184175	0.184510	0.184607	0.184525	0.183700
31	0.054852	0.053249	0.054773	0.052350	0.054440	0.052826	0.076449
32	0.011972	0.043601	0.031219	0.452840	0.492392	0.408909	0.184576
33	375.372009	287.596008	287.596008	287.596008	287.596008	287.596008	287.596008
34	0.096802	0.079599	0.079740	0.078388	0.078527	0.078443	0.075519
35	0.136155	0.074136	0.074197	0.073781	0.073833	0.073806	0.074698
36	0.080731	0.097579	0.097502	0.095570	0.095468	0.095515	0.112817
37	0.290975	0.201531	0.201576	0.201499	0.201539	0.201515	0.201881
38	0.013142	0.011438	0.011751	0.235477	0.239161	0.235498	0.269643
39	0.151068	0.159579	0.159592	0.160682	0.160708	0.160667	0.159978
40	0.049092	0.050856	0.051079	0.049052	0.049488	0.049233	0.069459
41	0.089124	0.067699	0.067741	0.069343	0.069420	0.069376	0.067523
42	0.053348	0.035790	0.036266	0.036632	0.037111	0.036817	0.036288
43	0.186663	0.142560	0.142478	0.142557	0.142484	0.142529	0.141651
44	0.037881	0.090310	0.090376	0.089881	0.089855	0.089844	0.091532
45	0.667616	0.670268	0.670285	0.670276	0.670292	0.670283	0.670042
46	0.156113	0.105934	0.106233	0.105387	0.105665	0.105487	0.104768
47	0.150610	0.143451	0.143360	0.143834	0.143729	0.143795	0.146658
48	1.237930	1.771560	1.771550	1.772470	1.771850	1.771910	1.771760
49	0.048317	0.100911	0.100644	0.101246	0.100763	0.100958	0.102416
50	0.035618	0.035265	0.035267	0.035238	0.035240	0.035239	0.035111
MEDIA .	7.716795	5.992422	5.992159	6.014764	6.011710	6.010395	6.006893
DESV.TIP.	52.523415	40.231663	40.231701	40.228428	40.228874	40.229050	40.229538
MINIMO .	0.001748	0.001725	0.001724	0.013816	0.013004	0.013074	0.023434
MAXIMO .	375.372009	287.596008	287.596008	287.596008	287.596008	287.596008	287.596008

Tendencia desconocida

Tabla VII

Modelo multiplicativo mixto. σ = 10 %

ITER	I	II	I.A	II.A	RT	MA
1	0.070484	0.043809	0.070382	0.043663	0.048940	0.048854
2	0.041682	0.039533	1.267350	1.163830	1.369360	0.175673
3	0.045201	0.043965	0.043947	0.042668	0.043312	0.043249
4	0.108673	0.095300	0.109756	0.096508	0.087351	0.087221
5	0.086358	0.084389	0.081863	0.080449	0.080416	0.082978
6	0.063091	0.060842	0.065037	0.061325	0.045282	0.048780
7	0.079427	0.083476	0.063295	0.072321	0.061473	0.105615
8	0.047040	0.042813	0.052754	0.048123	0.047460	0.048741
9	0.045029	0.023791	0.045375	0.024145	0.030945	0.028640
10	0.074952	0.068214	0.037305	0.034443	0.035837	0.095987
11	0.084787	0.083003	0.093289	0.094212	0.091680	0.075081
12	0.130024	0.123502	0.090591	0.085990	0.088442	0.080308
13	0.088685	0.089168	0.093439	0.094778	0.091972	0.104764
14	0.084990	0.090466	0.085236	0.091029	0.087340	0.088502
15	0.072389	0.065654	0.077776	0.076948	0.070535	0.072822
16	0.134819	0.111005	0.136758	0.112051	0.125384	0.117981
17	0.084890	0.059092	0.087194	0.059113	0.059161	0.057589
18	0.039387	0.043767	0.446177	0.449186	0.430620	0.108045
19	0.001607	0.001586	0.070177	0.058851	0.059866	0.077604
20	0.094745	0.085805	0.097517	0.085980	0.086058	0.086356
21	0.088874	0.081535	0.088826	0.081275	0.083615	0.083002
22	0.060519	0.060641	0.065864	0.065705	0.065742	0.062225
23	0.114973	0.050708	0.114751	0.050431	0.085662	0.086254
24	0.044287	0.046631	0.037028	0.039407	0.036392	0.050733
25	0.038777	0.032455	0.134280	0.129027	0.132153	0.060507
26	0.053136	0.039498	0.070038	0.057831	0.062390	0.026827
27	0.071722	0.067729	0.069410	0.064716	0.066252	0.069848
28	0.062830	0.062890	0.098687	0.096165	0.097977	0.118059
29	0.067047	0.057759	0.066622	0.057120	0.062227	0.065213
30	0.049455	0.056911	0.058776	0.068557	0.060135	0.043057
31	0.067597	0.066536	0.053522	0.052669	0.053188	0.080333
32	0.026633	0.022726	0.455415	0.254188	0.276333	0.129472
33	0.081445	0.065502	0.141894	0.139013	0.136045	0.084892
34	0.107866	0.072042	0.101216	0.064941	0.079273	0.072320
35	0.048467	0.048618	0.046079	0.045139	0.043464	0.043602
36	0.077896	0.081319	0.106465	0.109695	0.105133	0.071919
37	0.052179	0.048746	0.053100	0.051205	0.048317	0.048712
38	0.028733	0.028403	0.660145	0.424401	0.586062	0.241855
39	0.017243	0.015205	0.014452	0.013721	0.013961	0.014523
40	0.044544	0.022834	0.072070	0.058457	0.063837	0.027924
41	0.023060	0.022741	0.019848	0.019881	0.019841	0.023454
42	0.083003	0.088594	0.095285	0.101315	0.098178	0.083925
43	0.056144	0.056087	0.056027	0.055273	0.055702	0.063204
44	0.035846	0.036620	0.032460	0.031679	0.031473	0.038533
45	0.068052	0.053877	0.066716	0.054339	0.060245	0.063584
46	0.064255	0.070571	0.069942	0.076508	0.070467	0.070621
47	0.057815	0.041130	0.079813	0.059492	0.068526	0.046357
48	0.036416	0.030543	0.138516	0.094373	0.099710	0.046276
49	0.072237	0.086383	0.068342	0.081213	0.072621	0.064548
50	0.070752	0.070775	0.069959	0.069981	0.069881	0.070124
MEDIA .	0.065002	0.058504	0.126415	0.108867	0.116925	0.073734
DESV.TIP.	0.027440	0.025242	0.197707	0.170754	0.202511	0.038065
MINIMO .	0.001607	0.001566	0.014452	0.013721	0.013961	0.014523
MAXIMO .	0.134819	0.123502	1.267350	1.163830	1.369360	0.241855

Tendencia conocida

Tabla VII (*continuación*)

Modelo multiplicativo mixto. $\sigma = 10$ %

ITER	III-IV	I	II	I.A	II.A	RT	MA
1	0.436294	0.698141	0.698142	0.698139	0.698139	0.698139	0.698137
2	0.133242	0.139669	0.139228	1.360640	0.988888	0.852574	0.222446
3	0.328165	0.168285	0.168273	0.167893	0.167881	0.167889	0.167872
4	0.172008	0.145576	0.145552	0.146422	0.146398	0.146415	0.146309
5	0.234831	0.217508	0.217465	0.215661	0.215628	0.215628	0.216891
6	0.124886	0.255582	0.255423	0.255683	0.255528	0.255616	0.256102
7	0.132837	0.139372	0.142960	0.129020	0.132481	0.130358	0.160182
8	0.287818	0.220173	0.220045	0.220762	0.220674	0.220690	0.221035
9	0.402312	0.189951	0.189904	0.190037	0.189987	0.190014	0.189597
10	1.093470	0.074126	0.075428	0.042608	0.043987	0.041713	0.096669
11	0.097134	0.101258	0.101546	0.111819	0.112755	0.111322	0.076399
12	0.130928	0.128772	0.132216	0.091122	0.093840	0.092267	0.084183
13	0.115604	0.111601	0.111759	0.113973	0.114398	0.114028	0.124110
14	0.323757	0.345615	0.345451	0.345718	0.345548	0.345636	0.346023
15	0.066765	0.094621	0.094927	0.101248	0.101978	0.101388	0.103503
16	0.160108	0.159100	0.159925	0.160548	0.161414	0.160812	0.154395
17	0.270006	0.504711	0.504716	0.504760	0.504765	0.504763	0.504668
18	0.048232	0.047229	0.046557	3.647270	3.613700	37.478401	0.108784
19	0.001878	0.002770	0.002772	0.079848	0.067137	0.068576	0.077609
20	0.492322	0.503310	0.503306	0.503528	0.503523	0.503523	0.503546
21	0.414347	0.468363	0.468359	0.468347	0.468343	0.468345	0.468283
22	0.369350	0.340707	0.340694	0.341360	0.341348	0.341351	0.340892
23	1.583830	0.730374	0.730348	0.730312	0.730286	0.730305	0.730428
24	0.064567	0.046016	0.045654	0.038805	0.038551	0.038691	0.052478
25	0.256254	0.204460	0.204292	0.260735	0.256529	0.252576	0.210511
26	0.049705	0.048012	0.045586	0.065562	0.062305	0.063848	0.030300
27	0.661960	0.695381	0.695382	0.695301	0.695302	0.695301	0.695404
28	0.073909	0.087053	0.086452	0.116474	0.115384	0.116245	0.134770
29	0.118230	0.136629	0.136362	0.136343	0.136076	0.136238	0.137799
30	0.293951	0.218488	0.218791	0.220266	0.220675	0.220392	0.217276
31	0.070339	0.069371	0.070424	0.056268	0.057647	0.056268	0.082483
32	0.026506	0.066865	0.054033	0.601811	0.653187	0.666139	0.139770
33	201.850006	171.169998	171.169998	171.169998	171.169998	171.169998	171.169998
34	0.192386	0.163393	0.163700	0.159818	0.160093	0.159941	0.156028
35	0.443594	0.620425	0.620423	0.620332	0.620330	0.620331	0.620335
36	0.076925	0.077299	0.077283	0.106134	0.106071	0.106131	0.072954
37	0.252365	0.196461	0.196471	0.196980	0.197008	0.196979	0.197097
38	0.029705	0.030845	0.030692	0.594110	0.344017	0.504629	0.241190
39	0.097684	0.116965	0.116981	0.116807	0.116811	0.116797	0.116893
40	0.098030	0.067696	0.067494	0.088780	0.088144	0.088517	0.067517
41	0.363387	0.367877	0.367877	0.367687	0.367685	0.367685	0.367952
42	0.148314	0.094457	0.095385	0.106583	0.107433	0.107030	0.093500
43	0.346008	0.317316	0.317350	0.317264	0.317298	0.317277	0.318183
44	0.079390	0.105683	0.105812	0.104049	0.104063	0.104058	0.106762
45	0.815471	0.777727	0.777723	0.777721	0.777717	0.777719	0.777782
46	0.080048	0.242734	0.242458	0.244804	0.244462	0.244699	0.244745
47	0.063090	0.139686	0.139788	0.146658	0.146732	0.146690	0.139092
48	0.362984	0.548274	0.548133	0.556725	0.554778	0.555081	0.549248
49	0.205868	0.226736	0.227407	0.225833	0.226516	0.226158	0.224268
50	1.209780	1.038860	1.038860	1.038750	1.038750	1.038750	1.038790
MEDIA .	4.315012	3.673230	3.673115	3.795147	3.782840	4.460679	3.684424
DESV.TIP.	28.220980	23.929207	23.929226	23.916821	23.918232	24.378748	23.927542
MINIMO .	0.001878	0.002770	0.002772	0.038805	0.038551	0.038691	0.030300
MAXIMO .	201.850006	171.169998	171.169998	171.169998	171.169998	171.169998	171.169998

Tendencia desconocida

TABLA VIII

Resultados de Análisis de la Varianza y comparaciones múltiples

		σ	Observ. anuladas	Intervalo para la media al 95% de confianza		mínima signific.	Agrupaciones LSD al 5%.	Agrupaciones SNK al 5%.
Modelo multiplicativo puro	Tendencia conocida	0.01		0.0075	0.0116	0.0000	RT=II.*a*=II=I.*a*=I ; MA	RT=II.*a*=II=I.*a*=I ; MA
		0.05		0.0288	0.0340	0.0014	RT=II.*a*=II=I.*a*=I ; MA	RT=II*a*=II=I.*a*=I ; MA
		0.10		0.0566	0.0692	0.0803	RT=II.*a*=I.*a*=II=I ; I.*a*=II=I=MA	RT=II.*a*=I.*a*=II=I=MA
	Tendencia desconocida	0.01	33	0.0715	0.1268	0.8697	(III,IV)=II=I=MA=I.*a*=II.*a*=RT	(III,IV)=II=I=MA=I.*a*=II.*a*=RT
		0.05	32,33	0.1977	0.2828	1.0000	(III,IV)=II=I=RT=II.*a*=I.*a*=MA	(III,IV)=II=I=RT=II.*a*=I.*a*=MA
		0.10	33	0.2636	0.3367	0.9746	RT=II.*a*=I.*a*=I=II=MA=(III,IV)	RT=II.*a*=I.*a*=I=II=MA=(III,IV)
Modelo multiplicativo mixto	Tendencia conocida	0.01		0.0087	0.0130	0.0000	II=I=II.*a*=RT=I.*a* ; MA	II=I=II.*a*=RT=I.*a* ; MA
		0.05		0.0343	0.0443	0.0539	II=I=II.*a*=RT ; I=II.*a*=RT=MA ; II.*a*=RT=MA=I.*a*	II=I=II.*a*=RT=MA=I.*a*
		0.10		0.0759	0.1073	0.0503	II=I=MA=II.*a* ; I=MA=II.*a*=RT ; MA=II.*a*=RT=I.*a*	II=I=MA=II.*a*=RT=I.*a*
	Tendencia desconocida	0.01	32,33	0.0612	0.1023	0.9996	II=I=II.*a*=RT=I.*a*=(III,IV)=MA	II=I=II.*a*=RT=I.*a*=(III,IV)=MA
		0.05	33	0.2038	0.2994	0.9974	(III,IV)=II=I=MA=RT=II.*a*=I.*a*	(III,IV)=II=I=MA=RT=II.*a*=I.*a*
		0.10	32,33	0.2560	0.3116	0.9269	II=I=MA=(III,IV)=II.*a*=RT=I.*a*	II=I=MA=(III,IV)=II.*a*=RT=I.*a*

REFERENCIA BIBLIOGRAFICA

CONDE, J.: *Apuntes de Estadística Descriptiva*. Universidad Autónoma de Madrid.

CALOT, G.: *Curso de Estadística Descriptiva*. Paraninfo. 1974.

DRAPER, N. R. – SMITH, H.: *Applied Regression Analysis*. Wiley, New-York. 1966.

FREUDENSTEIN, F. – ROTH, B.: "Numerical Solution of Systems of Nonlinear Equations". *Journal of the Association for Computing Machinery*, Vol. 10, págs. 550–556. 1963.

JOHNSON, N. L. – LEONE, F. C.: *Statistics and Experimental Design in Engineering and the Physical Sciences*. John Wiley, New-York. 1964.

SCHEFFE, H.: *The Analysis of Variance*. Wiley, New-York. 1971.

SUMMARY

LEAST SQUARES ESTIMATION OF MULTIPLICATIVE TIME SERIES MODELS.

In time series data analysis models, where multiplicative components (trend, seasonal, random) are assumed, empirical methods are usually applied in parameter estimation. However, application of others well known methods in unusual.

This paper deals with multiplicative time series models and least squares methods. Least squares estimations of multiplicative series models are presented. Finally, results obtained by least squares methods and by well known empirical methods commonly used are compared.

Key words: Least squares estimation; time series; parametric estimation; multiplicative time series models; steady seasonality models.

AMS, 1980. Subject classification: 62M10; 90A20.